



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛТЕТ ПО ХИМИЧНО И СИСТЕМНО ИНЖЕНЕРСТВО

КАТЕДРА „ИНФОРМАТИКА”

маг. Стефан Михайлов Филипов

**СТРЕЛКОВО-ПРОЕКЦИОНЕН МЕТОД ЗА ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА
ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”
по научна специалност 4.6. Информатика и компютърни науки
(Информатика)

Научен ръководител: доц. д-р инж. Атанас Атанасов

Научно жури:

1. проф. д-р Ангел Дишлиев – председател, рецензент
2. доц. д-р инж. Веска Ганчева – рецензент
3. доц. д-р инж. Атанас Атанасов
4. доц. д-р инж. Тодор Димов
5. проф. д-р инж. Ташо Ташев

София, 2017

Дисертационният труд е написан на 153 страници, съдържа 44 фигури и 16 таблици. Цитирани са 210 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет за защита на заседание на разширен катедрен съвет на научното звено на катедра „Информатика”, състояло се на 14.12.2017 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 21.02.2018 г. от 14:00 часа в зала 321, сграда „А” на ХТМУ.

Материалите са на разположение на интересувалите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности”, стая 406, етаж 4, сграда „А” на ХТМУ.

Въведение

Диференциалните уравнения са от изключителна важност за всички природни науки и инженерни области, тъй като почти всички основни (фундаментални) природни закони се задават като обикновени или частни диференциални уравнения. В класическата механика основния закон на динамиката е обикновено диференциално уравнение от втори ред или система от определен брой обикновени диференциални уравнения. Броят на уравненията зависи от конкретната физична система. В преносните явления различни видове частни диференциални уравнения описват преноса на маса, енергия и импулс. Уравненията в теорията на еластичността и теорията на полето, в частност уравненията на електродинамиката, са частни диференциални уравнения. Основните закони в квантовата механика и квантовата теория на полето също се задават като частни диференциални уравнения. Решаването на частни диференциални уравнения обаче често води до нужда от решаване на обикновени диференциални уравнения, отгук и важността за тяхното изучаване.

Обикновените диференциални уравнения (ОДУ) са уравнения, които свързват неизвестна функция на една независима променлива с нейните производни и независимата променлива. Най-високата производна в уравнението определя реда на диференциалното уравнение. Търсената функция може да бъде реална или комплексно значеща функция, а независимата променлива реална или комплексна величина. Настоящата работа разглежда реални функции на една реална независима променлива. Обикновено, решението на дадено диференциално уравнение не е една единствена функция, а множество от функции. Изисква се налагането на допълнителни условия за да се избере едно от всички възможни решения. Такова решение се нарича частно решение на диференциалното уравнение. Като цяло, за еднозначно определяне на решението на обикновено диференциално уравнение от ред n се изисква задаването на n на брой допълнителни условия.

Налагането на две гранични условия към дадено обикновено диференциално уравнение от втори ред води до така наречената гранична задача (ГЗ) за това уравнение. Граничните условия са изисквания за стойността на търсената функция, нейните производни или комбинация от двете в краищата на интервала на промяна на независимата променлива. Могат да се задават и по-сложни условия, като интегрални условия, нелокални гранични условия и други. Самите гранични условия идват от постановката на дадената физична или инженерна задача. Например, ако независимата променлива е времето, а уравнението е уравнение на динамиката за механична система, то

тогава граничните условия могат да бъдат изисквания за положението или скоростта на тялото в два различни момента от време. При описание на скоростта на химични реакции може да имаме изискване за концентрацията в дадени моменти от време. Ако независимата променлива е положение в пространството, а уравнението е уравнение на топлопроводност, то тогава граничните условия могат да бъдат стойности на температурата или топлинния поток в две гранични точки. За дифузионното уравнение граничните условия могат да бъдат стойности на концентрацията или потока на вещество. Могат да бъдат наложени и интегрални условия, например интеграл от концентрацията, който изразява закона за запазване на началното количество вещество. Във флуидната динамика и аеродинамиката при решаването на уравненията на движение могат да бъдат наложени гранични условия за компонентите на скоростта на флуида по дадена повърхност и прочие. Ако разглежданото уравнение е уравнение за електричния потенциал налаганите гранични условия могат да бъдат например стойността на потенциала по повърхността на даден проводник, и т.н. Ясно е, че граничните задачи, в частност гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред, са разнообразни и възникват в много научни и инженерни области.

Решаването на гранична задача за обикновено диференциално уравнение, особено когато уравнението е нелинейно, е значително по-сложен проблем от решаването на начална задача (задача на Коши) за съответното уравнение. Решението, ако то изобщо съществува, обикновено е много сложна функция. Самите теореми за съществуване и единственост са много на брой, задаващи различни достатъчни, но не и необходими условия. Основните аналитични методи за решаване на гранични задачи, дори за линейни уравнения, са доста сложни, включващи използването на Грийн функции, интегрални уравнения, теория на Щурм-Лиувил и т.н. Ето защо числените методи за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения, било то линейни или нелинейни, са от особена важност.

Настоящата дисертационна работа изучава числени методи за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред. Разглежданите гранични условия са само от типа Дирихле гранични условия, тоест изисквания за стойността на търсената функция в граничните точки. В глава 1 се прави преглед на всички по-важни съществуващи числени методи за решаване на гранични задачи. Тъй като стрелковите методи разгледани в глава 1, както и предложения в тази работа стрелково-проеекционен метод за гранични задачи изискват решаването на задачи с начални условия (ЗНУ) в глава 1 се представят и по-важните числени методи за решаване на задачи с начални условия. Глава 2 предлага някои алтернативни подходи и подобрения към съществуващите методи

за решаване на гранични задачи, като например замяна на метода на крайните разлики (МКР) по метода на Нютон и по метода на Пикард с последователно (многократно) прилагане на линейния стрелкови метод.

Основната цел на настоящата дисертационна работа е разработване на нов стрелкови метод за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред чрез използване на H^1 -проекция на решението на задачата с начални условия. H^1 -проекцията на дадена функция е въведена в глава 4 като функция, която удовлетворява граничните условия и минимизира H^1 -полунормата на разликата между себе си и дадената функция. Разработен е метод за намиране на ограничено подобие на функции чрез минимизиране на H^1 -полунормата. Методът е представен в глава 3 и е публикуван в [1]. В глава 4, на базата на този метод е разработен нов стрелкови метод, наречен стрелково-проектионен, за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред. Методът е публикуван в [2]. Основно предимство на предложения стрелково-проектионен метод е неговата по-голяма стабилност (устойчивост) при определени ситуации в сравнение с другите стрелкови методи. Показано е, че за определени нелинейни гранични задачи методът намира решение, докато другите стрелкови методи и методите на крайните разлики за нелинейни задачи не успяват да намерят решение.

Особено внимание е отделено на прилагането на разгледаните числени методи за решаване на конкретни задачи. За всеки разгледан съществуващ метод, както и за всеки предложен в тази работа метод е разработена отделна програма на MATLAB, която е използвана за решаване на конкретни примери. Резултатите са представени в графичен и табличен вид. Всички разработени програми са приведени в приложение в края на дисертационната работа.

Искам да изкажа благодарност на моя ръководител доц. Атанас Атанасов, както и на проф. Ищван Фараго, проф. Стефен Вавасис, доц. Йорданка Ангелова, д-р Иван Господинов, д-р Фани Томова и Мирослава Коева без чиято помощ и съдействие тази работа нямаше да бъде възможна. Благодаря за ползотворните дискусии на проф. Гено Николов, проф. Стефка Димова и проф. Иван Димов.

Глава 1. Сравнителен анализ на основните съществуващи числени методи за обикновени диференциални уравнения

1.1. Крайни разлики, мрежи, диференчни схеми и грешки

Нека $u(t)$ е реална функция на реалната независима променлива $t \in [a, b]$. Нека посредством N на брой равноотдалечени точки $t_i, i = 1, 2, \dots, N$ разделим интервала $[a, b]$ на $N - 1$ интервала с дължина h . Това разделение дефинира *равномерна мрежа* върху интервала $[a, b]$:

$$\{ t_i = a + (i - 1)h, i = 1, 2, \dots, N, h = (b - a)/(N - 1) \}. \quad (1.1-7)$$

Точките $t_i, i = 1, 2, \dots, N$ се наричат *мрежови точки*. Дължината h на интервалите $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ се нарича *стъпка* на мрежата. Нека функцията $u(t)$ е дефинирана на интервала $[a, b]$. Ще означаваме стойностите на функцията $u(t)$ в мрежовите точки t_i посредством u_i , т.е. $u_i = u(t_i)$. Нареденото множество от стойности

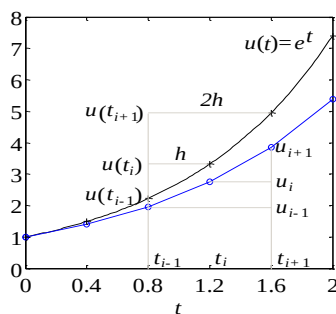
$$\{ u_i, i = 1, 2, \dots, N \} \quad (1.1-8)$$

се нарича *мрежова функция* или мрежова репрезентация на функцията $u(t)$. Когато използваният метод за намиране на стойностите на $u(t)$ в точките t_i е приблизителен, тогава u_i ще означава приблизителната стойност на $u(t)$ в t_i , т.е. $u_i \approx u(t_i)$ (виж фиг. 1.1-1).

Разликата

$$e_i = u_i - u(t_i) \quad (1.1-9)$$

се нарича *глобална грешка* в мрежовата точка t_i (виж таблица 1.1-1). Другите видове грешки са представени в следващите параграфи.



Фиг. 1.1-1

На фиг. 1.1-1 е показано точното решение $u(t) = \exp(t)$ на задачата с начално условие (задача на Коши) $u' = u, t \in (0, 2), u(0) = 1$. В син цвят е показано приближено числено решение на задачата получено чрез явен метод на Ойлер със стъпка $h = 0.4$.

В настоящата дисертационна работа, освен ако не е казано друго, ще бъде използвано следното означение:

$$v_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}. \quad (1.1-10)$$

За означаване на производната на $u(t)$ по отношение на t в точката t_i ще се използва

$$v(t_i) = u'(t_i). \quad (1.1-11)$$

Забележете, че $v_i \approx v(t_i)$ и те остават само приблизително равни дори и когато $u_{i+1} = u(t_{i+1})$

$$\text{и } u_i = u(t_i). \text{ Разликата } v(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{h} \quad (1.1-12)$$

е локалната грешка на апроксимация на производната (1.1-11) чрез крайна разлика напред.

За апроксимиране на втората производна на u в точката t_i ще бъде използвана централната крайна разлика от ред втори (виж (1.1-6)):

$$u''(t_i) \approx \frac{u(t_{i-1}) - 2u(t_i) + u(t_{i+1}))}{h^2} \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \quad (1.1-13)$$

За изчисляване на стойността f_i на функцията $f(t, u, v)$, където $v = u'$, и стойностите p_i и

$$q_i \text{ на нейните частни производни } p(t, u, v) = \frac{\partial f(t, u, v)}{\partial v} \text{ и } q(t, u, v) = \frac{\partial f(t, u, v)}{\partial u} \text{ в мрежовата}$$

точка t_i , ще бъде използвано

$$f_i = f(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad p_i = p(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad q_i = q(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad (1.1-14) - (1.1-16)$$

$$\text{където } v_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}.$$

1.2. Задача с начално условие

Разглеждаме обикновено диференциално уравнение от втори ред с две начални условия

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (1.2-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad u'(a) = v_a, \quad (1.2-2)$$

където a , b , u_a , и v_a са дадени константи, $u(t)$ е неизвестна реална функция на реална независима променлива $t \in [a, b]$, а f е дадена функция, която специфицира диференциалното уравнение (1.2-1). Двете начални условия (1.2-2) са стойността на функцията и стойността на първата и производна в началото на интервала, т.е при $t = a$.

Задачата за намиране на решение $u(t)$, $t \in [a, b]$ на диференциалното уравнение (1.2-1), което удовлетворява началните условия (1.2-2) се нарича *задача с начално условие* (ЗНУ) или *начална задача на Коши* (НЗК) за ОДУ от втори ред [3-7].

1.4. Числени методи за решаване на ЗНУ

Численото решаване на граничната задача по метода на стрелбата и по предложения в тази работа стрелково-проекционен метод изисква решаването на поредица от ЗНУ. Поради тази причина в тази част представяме най-важните за нас числени методи за решаване на ЗНУ [8-17]. Първо въвеждаме методите за ОДУ от първи ред. След това показваме как съответните методи могат да бъдат приложени за система от две ОДУ от първи ред. Накрая използваме резултатите за система от две уравнения от първи ред за извеждане на необходимите ни формули за едно ОДУ от втори ред. Разгледани са едностъпкови явни методи на Ойлер, Рунге-Кута от втори ред, Рунге-Кута от трети ред и Рунге-Кута от четвърти ред. Други важни методи за ЗНУ са съответните неявни методи, явните и неявни многостъпкови методи от тип Адамс и методи от тип предиктор-коректор. Тези методи няма да бъдат разглеждани в настоящата работа. Те могат да бъдат намерени в [8-17]. Важна тема при ЗНУ е темата за стабилност и избор на начални условия. Тя няма да бъде разглеждана отделно, а при въвеждането на стрелково-проекционния метод и при сравняването на метода с другите стрелкови методи.

1.4.1. Метод на Ойлер. Грешка на апроксимация

В този параграф представяме явния метод на Ойлер [18-26]. Това е едностъпков метод за решаване на задачата с начално условие (ЗНУ). За да въведем метода разглеждаме ЗНУ за ОДУ от 1-ви ред:

$$u' = f(t, u), \quad t \in (a, b), \quad (1.4.1-1)$$

$$u(a) = u_a. \quad (1.4.1-2)$$

Да предположим, че u_{i-1} е точната стойност на решението $u(t)$ на ЗНУ в мрежовата точка t_{i-1} , т.е. $u_{i-1} = u(t_{i-1})$. За да намерим стойността на решението на ЗНУ в мрежовата точка $t_i = t_{i-1} + h$ развиваме в ред на Тейлър решението $u(t)$ около точката t_{i-1} и полагаме $t = t_i$:

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + hu'(t_{i-1}) + O(h^2). \quad (1.4.1-3)$$

Като използваме $u'(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, u(t_{i-1}))$ и $u(t_{i-1}) = u_{i-1}$ получаваме

$$u(t_i) = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}) + O(h^2). \quad (1.4.1-4)$$

Накрая, премахвайки от уравнение (1.4.1-4) грешката $O(h^2)$ и заменяйки точната стойност $u(t_i)$ на решението в мрежовата точка t_i с приблизителната му стойност u_i получаваме:

$$u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}). \quad (1.4.1-5)$$

Формула (1.4.1-5) е итерационната формула на явния метод на Ойлер. Стойността u_i е апроксимация на точната стойност $u(t_i)$ на решението на (1.4.1-1), (1.4.1-2) в мрежовата точка t_i . Като извадим (1.4.1-4) от (1.4.1-5) получаваме $u_i - u(t_i) = O(h^2)$, което е *локалната грешка на дискретизация* на метода. Формула (1.4.1-5) може да бъде използвана за получаване на приблизителна стойност u_i на решението на ЗНУ в точка t_i дори когато u_{i-1} не е точната стойност на решението в точката t_{i-1} , а някакво приближение. Така, започвайки от началното условие $u_1 = u_a$, формула (1.4.1-5) може да бъде приложена последователно за $i = 2, 3, \dots, N$ при което се получава последователност от стойности $u_2, u_3, \dots, u_N$, които са апроксимация на точните стойности $u(t_2), u(t_3), \dots, u(t_N)$ на решението на ЗНУ (1.4.1-1), (1.4.1-2). Мрежовата функция $\{u_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ представлява приближено решение на (1.4.1-1), (1.4.1-2) на мрежата (1.1-7). Когато е необходимо мрежовата функция ще бъде представяна като вектор-стълб $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$. Уравнение (1.4.1-3) записано като

$$\frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{h} - f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) = \frac{1}{h} O(h^2) \quad (1.4.1-6)$$

показва с каква точност диференчното уравнение (1.4.1-5) (метод на Ойлер) апроксимира диференциалното уравнение (1.4.1-1). Лявата страна на уравнение (1.4.1-6) се нарича *локална грешка на апроксимация* на диференциалното уравнение (1.4.1-1) с диференчното уравнение (1.4.1-5) за решението на задачата (1.4.1-1), (1.4.1-2) или накратко: локална грешка на апроксимация на метода на Ойлер. Тъй като $O(h^2)/h = O(h)$, уравнение (1.4.1-6) показва, че тази грешката е от първи ред по h .

Методът на Ойлер може да бъде обобщен за система от обикновени диференциални уравнения от 1-ви ред, както и за ОДУ от по-висок ред.

1.4.2. Метод на Ойлер за система от две ОДУ от 1-ви ред

Да разгледаме следната ЗНУ:

$$u' = \xi(t, u, v), \quad v' = \eta(t, u, v), \quad (1.4.2-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad v(a) = v_a.$$

Започвайки от началните условия $u_1 = u_a$ и $v_1 = v_a$ стойностите u_i и v_i в мрежовите точки $t_i, i = 2, 3, \dots, N$ могат да бъдат намерени чрез:

$$u_i = u_{i-1} + h\xi(t_{i-1}, u_{i-1}, v_{i-1}), \quad (1.4.2-2)$$

$$v_i = v_{i-1} + h\eta(t_{i-1}, u_{i-1}, v_{i-1}).$$

1.4.3. Метод на Ойлер за ОДУ от 2-ри ред

Да разгледаме следната ЗНУ:

$$u'' = f(t, u, u'), \quad (1.4.3-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad u'(a) = v_a.$$

Полагайки $u' = v$ получаваме система от две диференциални уравнения от 1-ви ред, плюс начални условия:

$$u' = v, \quad (1.4.3-2)$$

$$v' = f(t, u, v),$$

$$u(a) = u_a, \quad v(a) = v_a,$$

което е система (1.4.2-1) с

$$\xi(t, u, v) = v, \quad (1.4.3-3)$$

$$\eta(t, u, v) = f(t, u, v).$$

Системата (1.4.3-2) може да бъде решена като се приложат формулите (1.4.2-2). Така, започвайки от началните условия $u_1 = u_a$ и $v_1 = v_a$ стойностите u_i и v_i в мрежовите точки t_i , $i = 2, 3, \dots, N$ могат да бъдат намерени чрез:

$$u_i = u_{i-1} + hv_{i-1}, \quad (1.4.3-4)$$

$$v_i = v_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}, v_{i-1}).$$

Това е метода на Ойлер за ОДУ от 2-ри ред с начално условие. В настоящата работа методът (1.4.3-4) ще бъде наричан още Ойлер-А. За да могат стрелковия метод и методът на крайните разлики за задачата с гранични условия да бъдат ефективно сравнявани може да бъде използван модифициран вариант на формула (1.4.3-4), а именно:

$$u_i = u_{i-1} + hv_{i-1}, \quad (1.4.3-5)$$

$$v_i = v_{i-1} + hf(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Методът (1.4.3-5) ще бъде наричан Ойлер-Б.

1.5. Гранична задача за ОДУ от втори ред

Разглеждаме обикновено диференциално уравнение от втори ред с две гранични условия.

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (1.5-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b, \quad (1.5-2)$$

където a , b , u_a , и u_b са дадени константи, $u(t)$ е неизвестна реална функция на реалната променлива $t \in [a, b]$, а f е дадена функция която специфицира диференциалното уравнение

(1.5-1) . Граничните условия (1.5-2) са гранични условия на Дирихле. Задачата за намиране на решение $u(t)$ на диференциалното уравнение (1.5-1), което да удовлетворява граничните условия (1.5-2) се нарича гранична задача (ГЗ) за ОДУ от втори ред. Съществуване и единственост на решението на ГЗ (1.5-1), (1.5-2) е разгледано накратко в параграф 1.6. В параграфи 1.7-1.9 са разгледани подробно три от най-важните класове числени методи за решаване на ГЗ (1.5-1), (1.5-2), а именно: метод на крайните разлики, квазилинеаризационен метод, и метод на стрелбата (стрелкови метод). Колокационният метод и проекционният метод са разгледани в глава 2 параграфи 2.5 и 2.6. Всеки разгледан метод е приложен върху конкретен пример и е разработена съответна програма на MATLAB за решаването му. Приложени са графични и таблични резултати.

1.7. Метод на крайните разлики

Всеки метод за решаване на диференциалното уравнение (1.5-1) заедно с граничните условия (1.5-2), чиято първа стъпка е дискретизиране на (1.5-1) чрез крайни разлики се нарича метод на крайните разлики (МКР) за граничната задача за ОДУ от втори ред [61-63]. Получената от дискретизиране на (1.5-1) система от (обикновено нелинейни) алгебрични уравнения, заедно с граничните условия (1.5-2), се решава чрез някакъв итеративен метод за системи алгебрични уравнения, например метод на простата итерация, метод на Нютон, и т.н. Методите (процедурите) за нелинейната гранична задача могат да бъдат класифицирани в зависимост от използвания итеративен метод за решаване на системата от алгебрични уравнения. В параграфи 1.7.1-1.7.4 са разгледани съответно методите на Якоби, Гаус-Зайдел, Пикард и Нютон. Методът на крайните разлики за нелинейната гранична задача се нарича от някои автори релаксационен метод.

Друг подход към решаване на (1.5-1), (1.5-2) е първо диференциалното уравнение (1.5-1) да бъде апроксимирано с друго диференциално уравнение, което да бъде решено заедно с граничните условия чрез някакъв метод. Полученото решение ще бъде приближено решение на граничната задача (1.5-1), (1.5-2). То може да бъде използвано за получаване на нова по-добра апроксимация на диференциалното уравнение, от което да получим ново приближено решение на граничната задача и т.н. Всеки такъв подход се нарича метод на последователните приближения. Ако апроксимиращото диференциално уравнение е линейно, тогава методът се нарича квазилинеаризационен метод (1.8). Ако линейното диференциално уравнение се реши чрез използване на крайни разлики, то отново имаме метод на крайните разлики. В глава 2 параграфи 2.1 и 2.2 се доказва, че да се линеаризира (1.5-1) по Пикард или съответно по Нютон и след това да се приложат крайни разлики към линейното уравнение, е еквивалентно на, първо (1.5-1) да се дискретизира и след това

системата алгебрични уравнения да се реши итеративно чрез Пикард (параграф 1.7.3), респективно Нютон. Базирайки се на този резултат авторите показват (параграфи 2.3 и 2.4). как методът на крайните разлики по Пикард и по Нютон може да се сведе до последователно прилагане на линейния стрелкови метод.

1.7.1. МКР по Якоби / Гаус-Зайдел

Да разгледаме следната ГЗ:

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (1.7.1-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b. \quad (1.7.1-2)$$

Нека разделим интервала $[a, b]$ посредством N мрежови точки $t_i = a + h(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, N$, където $h = (b-a)/(N-1)$. Като използваме крайната разлика (1.1-13) за втората производна на u и v_{i-1} (1.1-10) за първата производна на u и пренебрегнем локалната грешка на апроксимация, дискретизираме (1.7.1-1) и получаваме $N-2$ нелинейни алгебрични уравнения

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (1.7.1-3)$$

$$v_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad (1.7.1-4)$$

за всички вътрешни мрежови точки. За граничните точки прилагаме граничните условия (1.7.1-2):

$$u_1 = u_a, \quad u_N = u_b. \quad (1.7.1-5)$$

Уравнения (1.7.1-3) и (1.7.1-5) представляват система от N алгебрични уравнения за N независими променливи u_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Нека $f_i = f(t_i, u_i, v_{i-1})$. Итеративното решаване на ГЗ (1.7.1-3), (1.7.1-5) по метода на Якоби / Гаус-Зайдел се дава от следната итерационна формула:

Якоби	Гаус-Зайдел
$u^*_i = \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_{i+1} - h^2 f_i)$	$u^*_i = \frac{1}{2}(u^*_{i-1} + u_{i+1} - h^2 f_i)$

Да предположим, че е дадена начална мрежова апроксимираща функция (нулево приближение) u_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Използваме u_i в дясната страна на израза в таблицата и получаваме следващото приближение u^*_i за всички вътрешни мрежови точки $i = 2, \dots, N-1$. За граничните точки прилагаме граничните условия: $u^*_1 = u_a$, $u^*_N = u_b$.

1.7.3. МКР по Пикард / Нютон

Итерационната формула на МКР по Пикард / Нютон е:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{d}(\mathbf{u}), \quad (1.7.3-8)$$

където матрицата $\mathbf{L}$ и вектор-стълбът $\mathbf{d}(\mathbf{u})$ са:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & L_{32} & L_{33} & L_{34} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & L_{N-1,N-2} & L_{N-1,N-1} & L_{N-1,N} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - u_a \\ u_1 - 2u_2 + u_3 - h^2 f_2 \\ u_2 - 2u_3 + u_4 - h^2 f_3 \\ \\ u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N - h^2 f_{N-1} \\ u_N - u_b \end{bmatrix}$$

Пикард	Нютон
$L_{i,i-1} = 1, L_{i,i} = -2, L_{i,i+1} = 1$	$L_{i,i-1} = 1 + hp_i, L_{i,i} = -2 - hp_i - h^2 q_i, L_{i,i+1} = 1$

Нека, на интервала $[a, b]$ е зададена мрежова функция u , респективно вектор-стълб $\mathbf{u}$, която в общия случай не удовлетворява нито диференциалното уравнение, нито граничните условия. Ще наричаме $\mathbf{u}$ начална апроксимация (нулево приближение) на решението на ГЗ. Всяко следващо приближение $\mathbf{u}^*$ се получава по формула (1.7.3-8).

1.8. Квазилинеаризационен метод

При квазилинеаризационните методи [64-68] оригиналното уравнение първо се линеаризира по някакъв начин, след което се решава поредица от линейни задачи. Класически пример за квазилинеаризация е метода на Нютон за итеративно решаване на алгебрични уравнения. В този параграф представяме квазилинеаризационния метод за ГЗ за ОДУ от втори ред (1.5-1), (1.5-2).

Случай 1 (Пикард)	Случай 2 (Нютон)
$u^{*'} = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b)$	$u^{*'} = f(t, u, u') + q(u^* - u) + p(u^{*'} - u'), \quad t \in (a, b)$
$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b$	$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b$

Таблица 1.8-1. За Случай 2 $q = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{u,v}$, $p = \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right]_{u,v}$, $v = u'$.

Решението u^* на ГЗ дадена в таблица 1.8-1 (*Случай 1* или *Случай 2*) е приближение (апроксимация) на решението на граничната задача. Ако използваме това решение u^* като нова апроксимация u и продължим процеса получаваме итеративна процедура за решаване на граничната задача. Това е квазилинеаризационния метод за ГЗ за ОДУ от втори ред. *Случай 1* е метода на Пикард, *Случай 2* е метода на Нютон.

Като цяло *Случай 2* апроксимира оригиналното уравнение по-добре, тъй като запазва повече членове от развитието в Тейлъров ред. Понякога обаче, използването на *Случай 1* е за предпочитане, тъй като в определени ситуации методът на Нютон може да се окаже разходящ за много начални условия (начални апроксимационни функции), за които (или за част от които) методът на Пикард да е сходим. Както е показано в параграф 4.1.5 предложени в тази работа стрелково-проеекционен метод е близко свързан с квазилинеаризационния метод на Пикард.

Да отбележим, че квазилинеаризационният метод ще бъде използван при представения алтернативен подход за извеждане на итерационните формули на МКР по Пикард и Нютон (параграфи 2.1 и 2.2) и при замяната на МКР по Пикард и Нютон с последователно прилагане на линейния стрелков метод (параграфи 2.3 и 2.4). В параграфи 2.5 и 2.6 представяме други два метода, различни от МКР и линейния стрелков метод, които могат да бъдат използвани за решаване на линейни уравнения. Те ще бъдат приложени за решаване на линейната гранична задача от таблица 1.8-1 *Случай 1* (Пикард). В комбинация с квазилинеаризационния метод описан в този параграф двата метода могат да бъдат използвани за решаване на нелинейната гранична задача.

1.9. Стрелкови метод

Основната идея на всеки стрелков метод [76-83] за решване на гранични задачи е да замени граничната задача

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (1.9-1)$$

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b, \quad (1.9-2)$$

със задачата с начално условие (ЗНУ)

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (1.9-3)$$

$$u(a) = u_a, \quad u'(a) = V_a, \quad (1.9-4)$$

и да третира ГЗ като ЗНУ. В (1.9-4) V_a е неизвестната засега стойност на производната на u в първата (лява) граница $t = a$. Тъй като стойността на V_a е неизвестна можем да изберем някаква произволна стойност и да решим ЗНУ (1.9-3), (1.9-4) използвайки избраната произволна стойност v_a вместо V_a . Така полученото решение на ЗНУ ще

означим с $u(t; v_a)$. За решаването на ЗНУ можем да използваме някой от представените в параграф 1.4.1-1.4.9 числени методи. Полученото решение $u(t; v_a)$ на ЗНУ удовлетворява

$$u''(t; v_a) = f(t, u(t; v_a), u'(t; v_a)), \quad t \in (a, b), \quad (1.9-5)$$

$$u(a; v_a) = u_a, \quad u'(a; v_a) = v_a \quad (1.9-6)$$

и следователно удовлетворява първото (ляво) гранично условие, т.е. $u(a; v_a) = u_a$, но принципно не удовлетворява второто (дясно) гранично условие, т.е. $u(b; v_a) \neq u_b$.

Разликата

$$E(v_a) = u(b; v_a) - u_b \quad (1.9-7)$$

представлява *отклонението* от второто гранично условие. Очевидно, ако намерим число v_a такова, че $E(v_a) = 0$ тогава решението на съответната ЗНУ ще удовлетворява не само първото гранично условие, но и второто гранично условие и следователно ще бъде решение на граничната задача. Ако решението на ГЗ е единствено, то $E(v_a) = 0$ ако и само ако $v_a = V_a$. При това решението $u(t; V_a)$ на ЗНУ е точно търсено решение на ГЗ. Следователно всеки стрелкови метод е практически метод за търсене на корена V_a на уравнението

$$E(v_a) = 0. \quad (1.9-8)$$

Нагласянето на v_a е еквивалентно на прицелване, докато удовлетворяването на (1.9-8) е еквивалентно на уцелване на целта. Оттук идва и името стрелкови метод. Скорошни публикации касасещи приложения на стрелковия метод, както и ново-разработени техники за решаване на ГЗ за ОДУ от втори ред базирани на стрелковия метод, читателят може да намери в [175-210].

1.9.2. Стрелкови методи за нелинейни ГЗ

Като цяло, когато диференциалното уравнение (1.9-1) е нелинейно, за определяне на корена V_a на (1.9-8) трябва да решим някакво нелинейно алгебрично уравнение (1.9-8).

Някои добре познати и широко използвани числени методи за решаване на нелинейни алгебрични уравнения са метод на простата итерация, метод на секущата, метод на Нютон (Нютон-Рафсън), метод на Нютон с постоянен наклон, метод на разделяне на интервала наполовина (бисекция), и метод на фалшивата позиция [84-87]. Всички тези методи са представени в параграфи (1.9.2.1)-(1.9.2.6) заедно с примери и MATLAB кодове. Стрелковите методи за решаване на ГЗ се различават един от друг в зависимост от използвания числен метод за намиране на корена и носят съответното име: стрелкови метод с проста итерация, стрелкови метод с метод на секущата, стрелкови метод с метод

на Нютон, и т.н. При зададено приближение на корена v_a всички тези методи намират следващото приближение v_a^* посредством една и съща итерационна формула:

$$v_a^* = v_a - \frac{E(v_a)}{k}, \quad (1.9.2-1)$$

където $E(v_a)$ е отклонението (1.9-7) на решението на ЗНУ $u(t; v_a)$ от второто гранично условие. Методите се различават един от друг по използвания наклон k (виж параграфи (1.9.2.1)-(1.9.2.6) и таблица 1.9.2-1). Някои от методите, променят k на всяка итерационна стъпка, а други не. Тези които променят k може да се нуждаят от повече от една стрелкова траектория на итерация за да определят k . Наклоните k , редът на сходимост, както и някои други характеристики на различните стрелкови методи са дадени в таблица 1.9.2-1.

стрелкови метод	наклон k	начални апрокс.	сходимость (ред)	стабилност	стрелби за итерация
проста итерация	$k \neq 0$	1	бавна (1)	възможно несходим	1
секуща	$\frac{E - \bar{E}}{v_a - \bar{v}_a}$	2	средна до бърза (1.618)	възможно несходим	1
Нютон	$\frac{dE}{dv_a}$	1	бърза (2)	възможно несходим	2
посояннен наклон	$\left. \frac{dE}{dv_a} \right _{v_{a, starting}}$	1	бавна (1)	възможно несходим	1
бисекция	$\frac{4 E }{\bar{v}_a - \bar{\bar{v}}_a}$	2	бавна (1)	винаги	1
фалшива позиция	$\frac{E - \bar{E}(\text{или } \bar{\bar{E}})}{v_a - \bar{v}_a(\text{или } \bar{\bar{v}}_a)}$	2	средна (1)	винаги	1

Таблица 1.9.1-1. $E = E(v_a)$, $\bar{E} = E(\bar{v}_a)$, $\bar{\bar{E}} = E(\bar{\bar{v}}_a)$, $dE = E(v_a + dv_a) - E(v_a)$.

1.9.3. Прилагане на нелинейния стрелкови метод

Както дискутирахме прилагането на нелинейния стрелкови метод за решаване на граничната задача изисква две неща:

1. Числен метод за решаване на ЗНУ при зададено приближение v_a на корена.
2. Итеративен метод за решаване на нелинейното уравнение $E(v_a)=0$, където $E(v_a)$ е отклонението на решението на ЗНУ от второто гранично условие.

Цели и задачи на дисертационния труд

Основната цел на дисертационния труд е създаване на нов стрелкови метод, наречен стрелково-проекционен метод, за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред на базата на ограничено функционално подобие между функции на една независима променлива. Поставените задачи във връзка с основната цел са:

1. Преглед и сравнителен анализ на съществуващите числени методи за обикновени диференциални уравнения, по-конкретно числени методи за задачи с начални условия за обикновени диференциални уравнения от първи и втори ред и числени методи за гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред.
2. Разработване на теоретичен модел за ограничено функционално подобие базиран на условна минимизация на H^1 полунормата на разликата между дадена и търсена функция. Намиране на общо решение за мрежови функции при наличие на линейни ограничения.
3. Разработване на стрелкови метод за гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред базиран на ограничено функционално подобие при наличие само на гранични условия. Извеждане на итерационна формула за корекция на началното условие. Анализ на сходимостта на предложения метод. Сравнителен анализ между предложения метод и всички разгледани стрелкови методи и метода на крайните разлики.
4. Създаване на MATLAB програми за всички разгледани методи и прилагането им за решаване на конкретни примерни задачи. Анализ на резултатите.

Глава 2. Някои алтернативни подходи и подобрения към съществуващите методи за гранични задачи

2.1. МКР по Пикард – квазилинеаризационен подход

В този параграф е представено алтернативно извеждане на итерационната формула на МКР по Пикард. Вместо да дискретизираме диференциалното уравнение и след това да приложим итеративна процедура на Пикард за решаване на системата от алгебрични уравнения, първо линеаризираме диференциалното уравнение (както в параграф 1.8) и след това прилагаме крайни разлики. Този подход позволява замяната на МКР по Пикард с последователно прилагане на линейния стрелкови метод (параграф 2.3).

$$u^{*''} = f(t, u, u') . \quad (2.1-4)$$

Уравнение (2.1-4) може да бъде решено с метода на крайните разлики. Като дискретизираме (2.1-4) и пренебрегнем локалната грешка на апроксимация получаваме следното диференчно уравнение за вътрешните мрежови точки:

$$\frac{u_{i-1}^* - 2u_i^* + u_{i+1}^*}{h^2} = f(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.1-5)$$

$$u_i = u(t_i), \quad v_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} . \quad (2.1-6)$$

За граничните точки прилагаме граничните условия

$$u_1^* = u_a, \quad u_N^* = u_b . \quad (2.1-7)$$

Уравнения (2.1-5) заедно с (2.1-7) представляват система от N линейни алгебрични уравнения за N неизвестни u_i^* . Комбинирайки (2.1-5) и (2.1-7) и записвайки уравненията в матрична форма получаваме:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^* = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad (2.1-8)$$

където матрицата $\mathbf{L}$ е дефинирана в 1.7.3 а

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_a \\ h^2 f_2 \\ h^2 f_3 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ u_b \end{bmatrix}, \quad f_i = f(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.1-10)$$

Можем да решим (2.1-8) относно $\mathbf{u}^*$ директно като умножим отляво двете страни на (2.1-8) с обратната на (2.1-9) матрица $\mathbf{L}^{-1}$:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}). \quad (2.1-11)$$

Ще покажем и друг начин на представяне на (2.1-11), който, както ще видим, е много по-удобен за сравнение между метода на Пикард на предложения стрелково-проекционен метод. Нека добавим и извадим $\mathbf{Lu}$ от дясната страна на уравнение (2.1-8):

$$\mathbf{Lu}^* = \mathbf{Lu} - (\mathbf{Lu} - \mathbf{F}(\mathbf{u})). \quad (2.1-12)$$

Умножаваме отляво двете страни на (2.1-12) с $\mathbf{L}^{-1}$, използваме $\mathbf{d}(\mathbf{u})$ въведен в 1.7.3 и получаваме:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}(\mathbf{u}), \quad (2.1-14)$$

където матрицата $\mathbf{L}$ (2.1-9) е дадена в параграф 1.7.3 при стандартното извеждане на итерационната формула (2.1-14). Матрицата $\mathbf{L}^{-1}$ означава обратна на $\mathbf{L}$ матрица. Това е крайната итерационна формула на метода на крайните разлики по Пикард. Всяко следващо приближение (апроксимация) $\mathbf{u}^*$ се получава от предходното $\mathbf{u}$ използвайки (2.1-14). Ако редицата от приближения е сходяща то тя клони към решението на $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = 0$. Действително, ако положим $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ в (2.1-14) и след това умножим отляво двете страни с $\mathbf{L}$ получаваме $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = 0$. Следователно, както е дискутирано в параграф 1.7.5, граничната функция е приблизително решение на задачата (1.5-1), (1.5-2).

2.2. МКР по Нютон – квазилинеаризационен подход

В този параграф се представя алтернативен подход за извеждане на итерационната формула на МКР по Нютон. Вместо първо да се дискретизира диференциалното уравнение и след това да се прилага метода на Нютон за итеративно решаване на системата алгебрични уравнения, диференциалното уравнение първо се линеаризира по метода на Нютон (както в параграф 1.8) и след това се прилагат крайни разлики за решаване на полученото линейно уравнение. Този подход позволява замяната на МКР по Нютон с последователно прилагане на линейния стрелкови метод (параграф 2.4).

Нека отново функцията $u^*(t)$ да бъде неизвестното решение на ГЗ (1.5-1), (1.5-2):

$$u^{*'} = f(t, u^*, u^{*'}), \quad t \in (a, b), \quad (2.2-1)$$

$$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b \quad (2.2-2)$$

и нека $u(t)$ да бъде дадена функция дефинирана на интервала $[a, b]$. Не е нужно функцията да удовлетворява диференциалното уравнение (1.5-1), нито граничните условия (1.5-2). Развиваме $f(t, u^*, u^{*'})$ от (2.2-1) в ред на Тейлър около u и получаваме:

$$u^{*'} = f(t, u, u') + q(u^* - u) + p(u^{*'} - u') + O^2, \quad (2.2-3)$$

Където $q = \partial_2 f$, $p = \partial_3 f$, $v = u'$. В (2.2-3) O^2 представя всички членове от ред втори и по-висок. Като пренебрегнем O^2 в (2.2-3) и преобразуваме уравнението получаваме:

$$u^{*'} - pu^{*'} - qu^* = r, \quad (2.2-6)$$

$$r = f(t, u, u') - pu' - qu. \quad (2.2-7)$$

Тъй като u е дадена функция на t , функциите $p=p(t,u,v)$ и $q=q(t,u,v)$, а също и дясната страна на (2.2-6) r са дадени функции на t . Следователно (2.2-6) е линейно диференциално уравнение относно неизвестната (търсена) функция u^* . Като решим (2.2-6) заедно с граничните условия (2.2-2) получаваме функцията u^* , която очевидно ще бъде приблизително решение на диференциалното уравнение (1.5-1). Можем да решим (2.2-6) числено с метода на крайните разлики. Като дискретизираме (2.2-6) получаваме, за всички вътрешни точки $i = 2, 3, \dots, N-1$, следния израз:

$$\frac{u^*_{i-1} - 2u^*_i + u^*_{i+1}}{h^2} - p_i \frac{u^*_i - u^*_{i-1}}{h} - q_i u^*_i = r_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.2-8)$$

$$r_i = f_i - p_i v_{i-1} - q_i u_i, \quad f_i = f(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad p_i = p(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad q_i = q(t_i, u_i, v_{i-1}), \quad (2.2-9)$$

$$u_i = u(t_i), \quad v_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}. \quad (2.2-10)$$

В (2.2-8) сме пренебрегнали локалната грешка на апроксимация. За граничните точки прилагаме граничните условия:

$$u^*_1 = u_a, \quad u^*_N = u_b. \quad (2.2-11)$$

Избраната диференчна схема в (2.2-8) е удобна, както е обяснено в (1.1), при сравнение на МКР и стрелковите методи, в частност предложени стрелково-проекционен метод. Уравнения (2.2-8) заедно с (2.2-11) са система от N линейни алгебрични уравнения с N неизвестни u^*_i . Отново, както в предходния параграф, е удобно да запишем системата (2.2-8) и (2.2-11) в матрична форма:

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^* = \mathbf{R}(\mathbf{u}), \quad (2.2-12)$$

където матрицата $\mathbf{L}$ (Нютон) е дадена в 1.7.3, а

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \\ u^*_3 \\ \vdots \\ u^*_{N-1} \\ u^*_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_a \\ h^2 r_2 \\ h^2 r_3 \\ \vdots \\ h^2 r_{N-1} \\ u_b \end{bmatrix}, \quad r_i = f_i - p_i v_{i-1} - q_i u_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Умножаваме отляво двете страни на (2.2-12) с обратната на (2.2-13) матрица $\mathbf{L}^{-1}$ и получаваме:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{u}). \quad (2.2-15)$$

Подобно на формулата на МКР по Пикард (2.1-11) от предходния параграф, тази формула може да се представи във вид удобен за сравнение с формулите на стрелковите методи, включително стрелково-проекционния метод. Първо добавяме и изваждаме $\mathbf{L} \mathbf{u}$ от дясната страна на (2.2-12) за да получим:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^* = \mathbf{L}\mathbf{u} - (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{R}(\mathbf{u})). \quad (2.2-16)$$

След това умножаваме отляво двете страни на (2.2-16) с $\mathbf{L}^{-1}$ и получаваме:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}(\mathbf{u}). \quad (2.2-17)$$

Това е итерационната формула на МКР по Нютон. Всяко следващо приближение $\mathbf{u}^*$ се получава от предходното приближение $\mathbf{u}$ чрез (2.2-17).

2.3. Замяна на МКР по Пикард с последователно прилагане на линейния стрелкови метод

Намираме решенията $\bar{y}$ и $\bar{u}$ на следните две ЗНУ за хомогенното и нехомогенно уравнение:

$$\bar{y}'' = 0, \quad t \in (a, b), \quad (2.3-7)$$

$$\bar{y}(a) = 0, \quad \bar{y}'(a) = \bar{z}_a \quad (\bar{z}_a \text{ е произволно число } \neq 0, \text{ напр. } \bar{z}_a = 1) \quad (2.3-8)$$

и

$$\bar{u}'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b) \quad (u \text{ е дадена функция на } t), \quad (2.3-9)$$

$$\bar{u}(a) = u_a, \quad \bar{u}'(a) = \bar{v}_a \quad (\bar{v}_a \text{ е произволно число, напр. } \bar{v}_a = 0). \quad (2.3-10)$$

Решенията $\bar{y}$ и $\bar{u}$ на двете ЗНУ могат да бъдат намерени числено. Решението на граничната задача от таблиц 1.8.1 (Пикард) се дава от

$$u^*(t) = \bar{u}(t) + \frac{u_b - \bar{u}(b)}{\bar{y}(b)} \bar{y}(t). \quad (2.3-12)$$

Тъй като (2.3-7) лесно може да бъде интегрирано аналитично, не е нужно да интегрираме $\bar{y}$ числено (това няма да бъде вярно в следващия параграф, когато разглеждаме метода на Нютон). Тъй като $\bar{y}''(t) = 0$, следва че $\bar{y}'(t)$ е константа и следователно $\bar{y}(t)$ е линейна функция на t . Накрая, взимайки предвид, че граничните условия $u^*(a) = u_a$ и $u^*(b) = u_b$ трябва да бъдат удовлетворени получаваме:

$$u^*(t) = \bar{u}(t) - \frac{\bar{E}}{k}(t - a), \quad (2.3-13)$$

$$\bar{E} = \bar{u}(b) - u_b, \quad k = b - a. \quad (2.3-14)$$

Така, на всяка итерационна стъпка, за да решим (2.3-1), (2.3-1), т.е да намерим следващото приближение на ГЗ (1.5-1), (1.5-2), трябва да намерим решението $\bar{u}$ на ЗНУ (2.3-9), (2.3-10) и да го заместим в (2.3-13). Това, от изчислителна гледна точка, е принципно по-лека задача от решаването на (2.3-1) чрез МКР. След като сме намерили първото приближение u^* на ГЗ (1.5-1), (1.5-2) променяме уравнение (2.3-9), като заменим u с u^* , и интегрираме отново прилагайки описания метод. Така намираме следващото (второ) приближение на ГЗ (1.5-1), (1.5-2), и т.н. Предложения метод представлява последователно прилагане на линейния стрелкови метод по

Пикард. Забележете, че ако трябва да намерим производната $v^*(t)$ на функцията $u^*(t)$ можем просто да диференцираме (2.3-13) спрямо t :

$$v^*(t) = \bar{v}(t) - \frac{\bar{E}}{k}, \quad (2.3-15)$$

$$\bar{E} = \bar{u}(b) - u_b, \quad k = b - a. \quad (2.3-16)$$

2.4. Замяна на МКР по Нютон с последователно прилагане на линейния стрелкови метод

Нека u да бъде някоя дадена произволна функция, която ще бъде наричана начална апроксимационна функция (нулево приближение) на ГЗ (1.5-1), (1.5-2). Не е нужно u да удовлетворява (1.5-1) нито граничните условия (1.5-2). Нека u^* да бъде неизвестното (търсено) решение на ГЗ (1.5-1), (1.5-2). Развиваме $f(t, u^*, v^*)$ от уравнение (2.2-1) в ред на Тейлър около нулевото приближение u , и пренебрегваме членовете от ред втори и по-висок:

$$u^{*'} - pu^{*'} - qu^* = r, \quad t \in (a, b), \quad (2.4-1)$$

$$r = f(t, u, u') - pu' - qu, \quad q = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{u,v}, \quad p = \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right]_{u,v}, \quad (2.4-2)$$

където $v = u'$.

В (2.4-1) u^* е неизвестна търсена функция, докато u е позната (дадена) функция на t . Следователно функциите p , q , и r в (2.4-1) зависят само от t . Тъй като уравнение (2.4-1) е получено от уравнение (2.2-3) (респективно (2.2-1)) след пренебрегване на членовете от ред втори и по-висок то u^* ще бъде *приблизително* решение на оригиналното диференциално уравнение (2.2-1). Ако допълним (2.4-1) с двете гранични условия

$$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b, \quad (2.4-3)$$

тогава u^* ще бъде приближено решение на ГЗ (2.2-1), (2.2-2). Ако сме получили u^* посредством някакъв метод, можем да заменим нулевото приближение u с новото (първо) приближение u^* и да решим (2.4-1), (2.4-3) отново, за да получим второто приближение, и т.н.. В параграф 2.3 използвахме МКР за решаване на (2.4-1), (2.4-3). Сега представяме алтернативен подход без използване на крайни разлики. Уравнение (2.4-1) е *линейно, нехомогенно* диференциално уравнение от втори ред. Съответното *хомогенно* уравнение се получава от нехомогенното чрез изпускане на нехомогенната част r (2.4-2):

$$y'' = py' + qy, \quad t \in (a, b). \quad (2.4-4)$$

Вместо независимата променливата (функция) u^* използваме y . Нека $\bar{y}$ да бъде някое *частно* решение на *хомогенното* уравнение (2.4-4). Нека $\bar{\bar{y}}$ да бъде някое друго *частно*,

линейно независимо решение на уравнение (2.4-4). Не е необходимо решенията $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ да удовлетворяват граничните условия. *Общото решение* на (2.3-4) се дава от

$$y(t) = \bar{c} \cdot \bar{y}(t) + \bar{\bar{c}} \cdot \bar{\bar{y}}(t), \quad (2.4-5)$$

където $\bar{c}$ и $\bar{\bar{c}}$ са константи. Всяко частно решение на (2.4-4) може да бъде получено от (2.4-5) при подходящ избор на константите $\bar{c}$ и $\bar{\bar{c}}$. Нека $\bar{u}$ да бъде някое *частно* решение на *нехомогенното* уравнение (2.4-1), т.е. $\bar{u}$ удовлетворява:

$$\bar{u}'' = p\bar{u}' + q\bar{u} + r, \quad t \in (a, b). \quad (2.4-6)$$

Припомняме, че функциите p , q и r (виж 2.4.2) зависят само от t , тъй като u е дадена функция на t . *Общото* решение на *нехомогенното* линейно уравнение (2.4-1) е частното решение $\bar{u}$ на нехомогенното уравнение (2.4-6) плюс общото решение (2.4-5) на хомогенното уравнение:

$$u^*(t) = \bar{u}(t) + \bar{c} \cdot \bar{y}(t) + \bar{\bar{c}} \cdot \bar{\bar{y}}(t). \quad (2.4-8)$$

Избираме $\bar{\bar{c}} = 0$. След това намираме $\bar{y}$ удовлетворяващо ЗНУ:

$$\bar{y}'' = p\bar{y}' + q\bar{y}, \quad t \in (a, b) \quad (\text{в } p \text{ и } q, u \text{ е дадена функция на } t), \quad (2.4-9)$$

$$\bar{y}(a) = 0, \quad \bar{y}'(a) = \bar{z}_a \quad (\bar{z}_a \text{ е произволно число } \neq 0, \text{ напр. } \bar{z}_a = 1) \quad (2.4-10)$$

и $\bar{u}$ решение на ЗНУ:

$$\bar{u}'' = p\bar{u}' + q\bar{u} + r, \quad t \in (a, b) \quad (\text{в } p, q, \text{ и } r, u \text{ е дадена функция на } t), \quad (2.4-11)$$

$$\bar{u}(a) = u_a, \quad \bar{u}'(a) = \bar{v}_a \quad (\bar{v}_a \text{ е произволно число, напр. } \bar{v}_a = 0). \quad (2.4-12)$$

Решенията $\bar{y}$ и $\bar{u}$ на ЗНУ (2.4-9), (2.4-10) и (2.4-11), (2.4-12) могат да бъдат намерени числено. За да удовлетворим граничните условия $u^*(a) = u_a$ и $u^*(b) = u_b$ избираме $\bar{c}$ да бъде:

$$\bar{c} = \frac{u_b - \bar{u}(b)}{\bar{y}(b)}. \quad (2.4-13)$$

Замествайки $\bar{c}$ (2.4-13) и $\bar{\bar{c}} = 0$, и решенията $\bar{y}$ и $\bar{u}$ в (2.4-8) получаваме следващото приближение (апроксимация) на граничната задача (1.5-1), (1.5-2):

$$u^*(t) = \bar{u}(t) + \frac{u_b - \bar{u}(b)}{\bar{y}(b)} \bar{y}(t). \quad (2.4-14)$$

Действително, както лесно може да се провери, (2.4-14) удовлетворява двете гранични условия и в същото време има формата (2.4-8), следователно е решение на (2.4-1), (2.4-3).

Нека представим (2.4-14) във вид подобен на (2.3-13):

$$u^*(t) = \bar{u}(t) - \frac{\bar{E}}{\bar{y}(b)} \bar{y}(t), \quad (2.4-15)$$

$$\bar{E} = \bar{u}(b) - u_b. \quad (2.4-16)$$

На всяка итерационна стъпка, за да намерим следващото приближение u^* (2.4-15) на решението на ГЗ от текущото приближение u , трябва да намерим решенията $\bar{y}$ на ЗНУ (2.4-9), (2.4-10) и $\bar{u}$ на ЗНУ (2.4-11), (2.4-12) и да ги заместим в (2.4-15). От изчислителна гледна точка това е много по-лека задача от изчисляване на $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}(\mathbf{u})$ в (2.2-17). Броят на изчислителните операции за намиране на u^* по (2.4-15) е $O(h)$, докато броят операции за пресмятане на $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}(\mathbf{u})$ е $O(h^3)$. След като намерим новото приближение u^* го използваме вместо старото приближение u в p , q , и r от (2.4-9) и (2.4-11), и повтаряме процеса за да намерим следващото приближение и т.н. Ако получената редица от функции (приближения) е сходяща, то границата им е решението на ГЗ (1.5-1), (1.5-2). Описаната процедура представлява последователно прилагане на линейния стрелкови метод. За да намерим първата производна $v^*(t)$ на функцията $u^*(t)$ може просто да диференцираме (2.4-15) по отношение на t :

$$v^*(t) = \bar{v}(t) - \frac{\bar{E}}{\bar{y}(b)} \bar{z}(t), \quad (2.4-17)$$

$$\bar{E} = \bar{u}(b) - u_b, \quad \bar{z}(t) = \bar{y}'(t). \quad (2.4-18)$$

2.7. Изводи към Глава 2

Използвайки квазилинеаризационния метод е намерен нов начин за извеждане на итерационните формули на метода на крайните разлики по Пикард (2.1) и на метода на крайните разлики по Нютон (2.2). На базата на тези извеждания е предложена замяна на метода на крайните разлики по Пикард и на метода на крайните разлики по Нютон с последователно прилагане на линейния стрелкови метод (2.3), (2.4). Разработени са схеми за решаване на гранични задачи използващи квазилинеаризация по Пикард с колокационен метод (2.5) и проекционен метод (2.6), като за базисни функции са използвани полиноми на Лежандър. За извършване на проекциите при проекционния метод е приложено използване на асоциирани полиноми на Лежандър за опростяване на крайните формули. За всички предложени методи са разработени програми на MATLAB и програмите са използвани за решаване на конкретни примери. Резултатите са представени графично и таблично.

Глава 3. Ограничено функционално подобие чрез минимизиране на H^1 полунормата

Често срещана апроксимационна задача е следната: „Дадена е функция и множество от ограничения (условия). Да се намери най-близката функция на дадената, която удовлетворява ограниченията.“ Обикновено, функционална близост се търси чрез минимизиране на L^2 нормата (Евклидова норма) на разликата между двете функции. В настоящата дисертационна работа се дефинира функционално *подобие* между реални функции на една реална променлива. Критерият за подобие е базиран на минимизиране на H^1 полунормата на разликата между двете функции. Използвайки този критерий за подобие в тази глава се решава задачата за намиране на функцията, която удовлетворява зададените ограничения (условия) и в същото време е най-подобна на дадената функция. Намерено е общо решение на задачата в дискретния случай, т.е. за мрежови функции, при наличие само на линейни ограничения [1]. В глава 4, на базата на въведения критерий за подобие е разработен стрелкови метод за решаване на ГЗ за обикновени диференциални уравнения от втори ред.

3.1. Дефиниция за ограничено функционално подобие чрез минимизиране на H^1 полунормата

В този параграф се предлага дефиниция за ограничено подобие на функции, т.е. подобие при наличие на някакви ограничения (условия) за търсената функция.

Дефиниция 3.1-1

(Ограничено функционално подобие)

Функцията u^* ще бъде *подобна* на u , при определени дадени ограничения (условия), ако u^* минимизира H^1 полунормата на разликата $u^* - u$ и в същото време удовлетворява дадените ограничения.

H^1 полунормата на разликата $u^* - u$ е просто L^2 нормата на първата производна на $u^* - u$:

$$|u^* - u|_{H_1} = \|(u^* - u)'\| = \|u^{*'} - u'\|. \quad (3.1-1)$$

Следователно, имайки предвид дефиницията на L^2 нормата $\|\dots\|$ (забележка 2.1-1), можем да запишем за H^1 полунормата на $u^* - u$:

$$|u^* - u|_{H_1} = \sqrt{\int_a^b (u^{*'} - u')^2 dt}. \quad (3.1-2)$$

Ограничения (условията), които u^* трябва да удовлетворява могат да бъдат от различен тип, например гранични условия на двете граници $t = a$ и $t = b$:

$$u^*(a) = u_a, u^*(b) = u_b, \quad (3.1-3)$$

линейни комбинации от функционални стойности $u^*(t_i)$ в краен брой точки t_i , $i = 1, 2, \dots, N$:

$$A_{j1}u^*(t_1) + A_{j2}u^*(t_2) + \dots + A_{jN}u^*(t_N) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (3.1-4)$$

интегрални условия от вида:

$$\int_a^b f(t)u^*(t)dt = 1, \quad (3.1-5)$$

и други. Ограниченията могат да бъдат и комбинации от изброените типове.

Забележка 3.1-1

(Минимизиране на умножения квадрат на H^1 полунормата)

Ако функцията u^* минимизира квадрата на H^1 полунормата на $u^* - u$ умножен по коя да е ненулева константа:

$$\text{const} |u^* - u|_{H^1}^2, \quad (3.1-6)$$

където $\text{const} > 0$, то тогава u^* минимизира и самата H^1 полунорма на $u^* - u$ и обратното.

Забележка 3.1-2

(Позволени ограничения)

За някои ограничения (условия) задачата не е добре дефинирана, но подробно изследване е извън рамките на настоящата дисертационна работа. За нашите нужди е достатъчно да кажем, че задачата е добре дефинирана за две гранични условия и интегрални условия от вида (3.1-5), както и за комбинация от двете.

3.2. Точно решение на задачата за ограничено функционално подобие на мрежови функции при наличие на линейни ограничения

Аналогично на предложената в параграф 3.1 дефиниция за ограничено подобие, се прилага дефиниция за ограничено подобие на мрежови функции чрез минимизиране на дискретизираната H^1 полунорма на разликата от двете функции. Минимизирането се извършва при спазване на дадените ограничения.

Нека е дадена реална функция $u(t)$ на една реална независима променлива $t \in [a, b]$.

Мрежовата репрезентация на функцията е:

$$\{ u_i = u(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \}, \quad (3.2-1)$$

$$\{ t_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad h = (b-a)/(N-1) \}. \quad (3.2-2)$$

За простота ще бележим тази мрежовата функция просто със символа u . Ще търсим мрежова функция u^* :

$$\{ u^*_i, i=1,2,...,N \}, \quad (3.2-3)$$

такава че u^* да е колкото се може по-подобна по форма на мрежовата функция u и в същото време да удовлетворява следните M на брой линейни ограничения (условия):

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} u^*_i = c_j, \quad j=1,2,...,M < N. \quad (3.2-4)$$

Ограниченията (3.2-4) могат да бъдат записани в матрична форма:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{c}, \quad (3.2-5)$$

където

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix}, \quad (3.2-6)$$

и $\mathbf{u}^*$ е $N \times 1$ вектор стълб с неизвестните (търсени) компоненти (виж (3.2-14)).

За да дефинираме ограничено подобие между функциите $\{ u_i, i=1,2,...,N \}$ и $\{ u^*_i, i=1,2,...,N \}$ разглеждаме целевата функция

$$I = \sum_{i=1}^{N-1} ((u^*_{i+1} - u^*_i) - (u_{i+1} - u_i))^2, \quad (3.2-7)$$

където u_i са N дадени стойности, а u^*_i са N неизвестни търсени стойности. Тъй като целевата функция I е пропорционална на квадрата на дискретизираната H^1 полунорма на $u^* - u$, то минимизирането на I е еквивалентно на минимизиране на дискретизираната H^1 полунорма (виж забележка 3.1-1). Следователно, ако $u^*_i, i=1,2,...,N$ минимизират целевата функция I и в същото време удовлетворяват ограниченията (3.2-4), тогава функцията u^* ще бъде считана *подобна* на u , при зададени ограничения (3.2-4).

За да се намери минимума на I , при зададени ограничения (3.2-4), се прилага метода на Лагранж на неопределените коефициенти (множители). Първо, уравненията на ограниченията (условията) (3.2-4) се преобразуват на:

$$c_j - \sum_{i=1}^N A_{ji} u^*_i = 0, \quad j=1,2,...,M. \quad (3.2-8)$$

След това се умножава (3.2-8) с неопределените коефициенти λ_j , сумира се по j , и се добавя сумата към лявата страна на целевата функция:

$$J = I + \sum_{j=1}^M \left(\lambda_j (c_j - \sum_{i=1}^N A_{ji} u^*_i) \right). \quad (3.2-9)$$

Изчисляват се производните на J по отношение на неизвестните $u^*_1, u^*_2, \dots, u^*_N$ и се приравняват на нула:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u^*_1} &= -2((u^*_2 - u^*_1) - (u_2 - u_1)) - \sum_{j=1}^M \lambda_j A_{j1} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial u^*_k} &= 2((u^*_k - u^*_{k-1}) - (u_k - u_{k-1})) - 2((u^*_{k+1} - u^*_k) - (u_{k+1} - u_k)) - \sum_{j=1}^M \lambda_j A_{jk} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial u^*_N} &= 2((u^*_N - u^*_{N-1}) - (u_N - u_{N-1})) - \sum_{j=1}^M \lambda_j A_{jN} = 0,\end{aligned}\quad (3.2-10) - (3.2-12)$$

където $k=2,3,\dots,N-1$. Преобразуваме системата от уравнения (3.2-10)-(3.2-12) така, че само членове съдържащи u^*_i остават от лявата страна на уравненията. След това, се записва системата от уравнения в матрична форма:

$$\bar{\mathbf{L}}\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.2-13)$$

където $\bar{\mathbf{L}}$ е $N \times N$ матрица, $\mathbf{u}^*$ и $\mathbf{u}$ са $N \times 1$ вектор стълба, а $\boldsymbol{\lambda}$ е $M \times 1$ вектор стълб:

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^*_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_M \end{bmatrix}. \quad (3.2-14)$$

Матрицата $\mathbf{A}$ е дадена в (3.2-6). Уравнение (3.2-13) е система от N на брой уравнения за $N + M$ на брой неизвестни: $u^*_i, i=1,2,\dots,N$ и $\lambda_j, j=1,2,\dots,M$. Редовете в матрицата $\bar{\mathbf{L}}$ са линейно зависими и следователно $\bar{\mathbf{L}}$ е необратима. Забелязва се, че всяка мрежова функция $u^*_i = u_i + \text{const}, i=1,2,\dots,N$ е решение на неограничената задача. Решението на уравнение (3.2-13) не е единствено освен ако не се въведат ограничения. Като цяло, налагането на ограничения отделят едно от всичките възможни решения $\mathbf{u}^*$. За да се премахне необратимостта (сингуларността) на матрицата $\bar{\mathbf{L}}$ добавяме уравненията за ограниченията, общо M на брой, представени чрез уравнение (3.2-5) към уравнение (3.2-13). За да може удобно да се работи в матрична форма първо се допълва матрицата $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{c}$ с нули. Прибавят се $N - M$ реда с нули към матрицата $\mathbf{A}$ и се получава $N \times N$ матрица $\bar{\mathbf{A}}$. Прибавят се $N - M$ нули към вектора $\mathbf{c}$ и се получава $N \times 1$ вектор стълб $\bar{\mathbf{c}}$. Уравнение (3.2-5) може да бъде пренаписано като

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{c}}, \quad (3.2-15)$$

където

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{MN} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^*_{11} \\ u^*_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^*_{1N} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_M \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2-16)$$

Към дясната страна (3.2-15) се добавя и изважда $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u}$ и се получава

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{c}}. \quad (3.2-17)$$

След това се събира (3.2-13) и (3.2-17) и се получава

$$(\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u}^* = (\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{c}} \right). \quad (3.2-18)$$

Дали матрицата $\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}}$ е обратима или не зависи от конкретната матрица $\bar{\mathbf{A}}$. За повечето ограничения $\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}}$ е обратима матрица. Важно изключение е ограничение (условие) от тип разлика, например $u^*_{1N} - u^*_{11} = c$, тоест $\bar{A}_{11} = -1$ и $\bar{A}_{1N} = 1$. За този тип ограничение матрицата $\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}}$ е необратима. Това е отражение на факта, че въпреки наличието на ограничение задачата е все още неопределена. Действително, ако u^* минимизира (3.2-7) и удовлетворява ограничението, тогава $u^* + \text{const}$ също минимизира (3.2-7) и удовлетворява същото ограничение. Подробно изследване на проблема е извън темата на настоящата работа. Нека допуснем, че ограниченията са такива, че $\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}}$ е обратима. Тогава могат да се умножат двете страни на (3.2-18) от ляво с $(\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ получавайки $\mathbf{u}^*$ като функция на неизвестния вектор $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - (\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{c}} \right). \quad (3.2-19)$$

Замества се $\mathbf{u}^*$ в ограниченията (3.2-5) и се получава

$$\mathbf{A} \left(\mathbf{u} - (\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{c}} \right) \right) = \mathbf{c}. \quad (3.2-20)$$

Накрая решавайки (3.2-20) относно $\boldsymbol{\lambda}$, се получава вектора на неопределените коефициенти на Лагранж

$$\boldsymbol{\lambda} = 2 \left(\mathbf{A}(\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{c} - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{c}})). \quad (3.2-21)$$

Дясната страна на (3.2-21) съдържа само известни величини. Матрицата $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{c}$ (респективно $\bar{\mathbf{A}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$), а също и вектора $\mathbf{u}$ са специфични за дадената задача. Като се изключи размера, матрицата $\bar{\mathbf{L}}$ е винаги същата. За да се изчисли вектор стълба $\boldsymbol{\lambda}$,

дадените стойности u_i , $i=1,2,\dots,N$ се заместват в (3.2-21). След това λ се замества в (3.2-19) и търсените стойности u^*_i , $i=1,2,\dots,N$ са намерени.

Пример 3.2-1

Разглеждаме функцията u зададена чрез

$$\{u_i = t_i^2, i=1,2,\dots,N\} \quad (3.2-24)$$

на равномерната мрежа

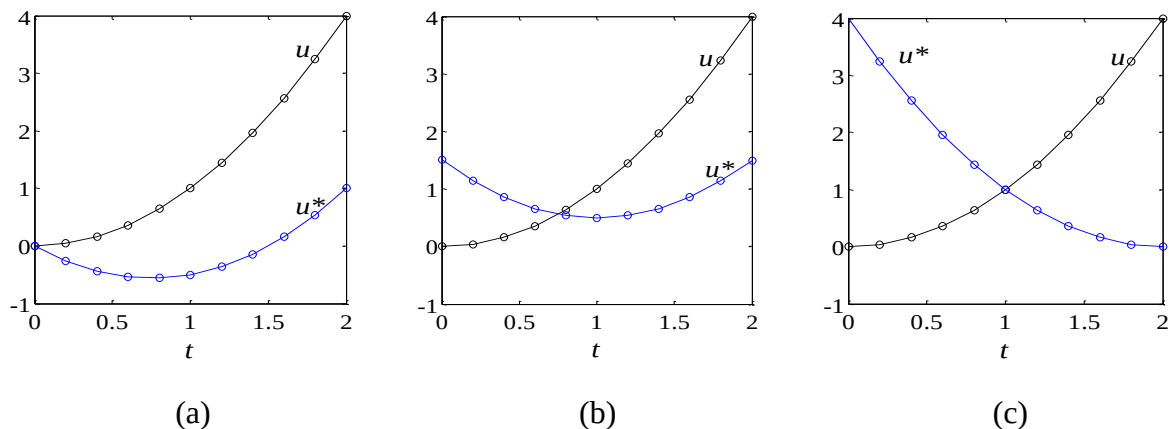
$$\{t_i = a + (i-1)h, i=1,2,\dots,N, h=(b-a)/(N-1)\}, \quad (3.2-25)$$

$$a=0, b=2, N=11. \quad (3.2-26)$$

Търси се функцията u^* , т.е. $\{u^*_i, i=1,2,\dots,N\}$, подобна на u и удовлетворяваща двете гранични условия

$$u^*_{1} = 0, u^*_{N} = 1. \quad (3.2-27)$$

Резултатите са показани на фиг. 3.2-1 (а).



Фиг. 3.2-1. Функцията u^* е подобна на u и удовлетворява (а) $u^*(0) = 0$, $u^*(2) = 1$,

(б) $u^*(0) = 3/2$, $u^*(2) = 3/2$, и (с) $u^*(0) = 4$, $u^*(2) = 0$.

Пример 3.2-2

Решаваме пример 3.2-1 за следните две гранични условия:

$$u^*_{1} = 3/2, u^*_{N} = 3/2. \quad (3.2-28)$$

Резултатите са представени на фиг. 3.2-1 (б).

Пример 3.2-3

Решаваме пример 3.2-1 за следните две гранични условия:

$$u^*_{1} = 4, u^*_{N} = 0. \quad (3.2-29)$$

Резултатите са представени на фиг. 3.2-1 (с).

Пример 3.2-4

Разглеждаме мрежовата функция u дефинирана чрез

$$\{ u_i = (t_i - 1)^3 + (t_i - 1)^2, i = 1, 2, \dots, N \} \quad (3.2-30)$$

на равномерната мрежа

$$\{ t_i = a + (i - 1)h, i = 1, 2, \dots, N, h = (b - a)/(N - 1) \}, \quad (3.2-31)$$

$$a = 0, b = 2, N = 11. \quad (3.2-32)$$

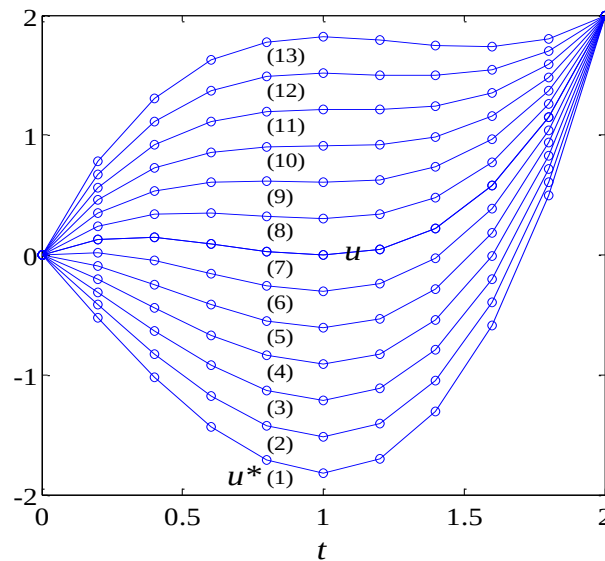
Търси се функцията u^* , т.е. $\{ u^*_i, i = 1, 2, \dots, N \}$, подобна на u и удовлетворяваща следните две гранични условия:

$$u^*_{i=1} = u_1, u^*_{i=N} = u_N \quad (3.2-33)$$

и следното линейно спрямо u^*_i условие:

$$\sum_{i=1}^N u^*_i = 2(n - 7) + \sum_{i=1}^N u_i. \quad (3.2-34)$$

Проблемът се решава за $n = 1, 2, \dots, 13$. Условието (ограничението) (3.2-34) може да бъде разглеждано като ‘интегрално’ условие. Резултатите са показани на фиг. 3.2-4.



Функциите u^* отбелязани с (1)-(13) са подобни на u и удовлетворяват $u^*(0) = 0$,

$u^*(2) = 2$, и $\sum_{i=1}^N (u^*_i - u_i) = 2(n - 7)$ за $n = 1, 2, \dots, 13$ съответно. За $n = 7$, $u^* \equiv u$.

Фиг. 3.2-4

3.4. Изводи към Глава 3

Предложена е дефиниция за ограничено подобие на реални функции на една реална променлива (3.1). Критерият за подобие е базиран на условна минимизация на H^1 полунормата на разликата между търсената функция и дадената функция. Задачата е решена в затворен вид за мрежови функции при наличие единствено на линейни ограничения, у-ния (3.2-19), (3.2-21). Използван е метода на Лагранж на неопределените коефициенти за свеждане на задачата за търсене на условен минимум до задача с безусловен минимум. Приведени са примери за намиране на най-подобната функция на дадена функция при наличие само на гранични условия (примери 3.1-1, 3.1-2, 3.1-3). Приведен е пример за намиране на най-подобната функция при наличие едновременно на гранични и интегрални условия (пример 3.1-4). Показано е как полученото решение за ограничено подобие на мрежови функции може да бъде използвано за конструиране на метод за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред (3.3). Приведен е конкретен пример (пример 3.3-1). За всеки пример е разработена програма за решаването му. Резултатите са представени в графичен и табличен вид.

Глава 4. Стрелково-проекционен метод за гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред

В тази глава е представен нов стрелкови метод, наречен *стрелково-проекционен*, за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред [2]. Методът работи както следва: първо, избира се произволна стойност за началното условие и се извършва интегриране на диференциалното уравнение при което се получава решение на съответната ЗНУ; след това, крайната стойност на това решение се използва в проста итерационна формула за корекция на началното условие; с коригираното начално условие се конструира нова ЗНУ и диференциалното уравнение се интегрира отново. Процесът се повтаря до удовлетворяване на второто гранично условие. Итерационната формула е изведена чрез използване на спомагателна функция, наречена H^1 -проекция, която удовлетворява двете гранични условия и минимизира H^1 полунормата на разликата между себе си и решението на ЗНУ.

4.1. Разработване на стрелково-проекционен метод за гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред

В този раздел се доказва, че (i) H^1 -проекцията на дадена функция запазва втората производна на функцията и (ii) H^1 -проекцията на решението на ЗНУ е приближено решение на граничната задача. На базата на тези резултати се конструира предложени стрелково-проекционен метод за решаване на гранични задачи за ОДУ от втори ред и се извежда итерационна формула за коригиране на началното условие. Тази формула е основния теоретичен резултат на настоящия дисертационен труд.

4.1.1. Дефиниция на H^1 -проекция на решението на ЗНУ

Нека функцията $u(t;v_a)$, $t \in [a,b]$ да бъде решение на ЗНУ удовлетворяващо

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (4.1.1-1)$$

$$u(a; v_a) = u_a, \quad u'(a; v_a) = v_a, \quad (4.1.1-2)$$

където v_a е някаква, може и произволно избрана, апроксимация на корена V_a на (1.9-8).

Решението u на ЗНУ (4.1.1-1), (4.1.1-2) се преобразува във функцията $u^*(t) \in H^1$, $t \in [a,b]$ която удовлетворява двете гранични условия (4.1.1-2), т.е.

$$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b, \quad (4.1.1-3)$$

и минимизира H^1 полунормата на разликата между себе си и решението на ЗНУ, т.е. минимизира функционала:

$$S(u^*) = \int_a^b (u^{*'} - u')^2 dt. \quad (4.1.1-4)$$

Функцията u^* ще бъде наричана H^1 -проекция на решението u на ЗНУ.

Забележка 4.1.1-1

(Трансформация на ограничено функционално подобие)

Според дефиницията си, H^1 -проекцията е трансформация на ограничено функционално подобие на решението на ЗНУ в удовлетворяващата граничните условия функция u^* . Тази трансформация е разгледана подробно в глава 3.

Забележка 4.1.1-2

(Проекция)

Лесно е да се покаже, че така дефинираната трансформация действително представлява проекция на функцията u във функцията u^* . Ако означим трансформацията с P , тогава $Pu = u^*$. От друга страна, тъй като u^* удовлетворява граничните условия, $Pu^* = u^*$. От тук получаваме $Pu = u^* = Pu^* = P^2u$. Понеже това е вярно за всяка функция u следва, че $P = P^2$, което е дефиниция за проекция.

4.1.2. H^1 -проекцията като трансформация запазваща втората производна

В този параграф се доказва, че H^1 -проекцията е трансформация запазваща втората производна.

Теорема 4.1.2-1 (Запазване на втората производна)

Ако функцията u^* минимизира H^1 полунормата на $u^* - u$ и удовлетворява граничните условия

$$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b, \quad (4.1.2-1)$$

тогава втората производна на функцията u^* е равна на втората производна на функцията u за всяко $t \in (a, b)$, т.е.

$$u^{*''} = u'', \quad t \in (a, b). \quad (4.1.2-2)$$

Доказателство: От забележка 3.1-1 следва, че минимизирането на H^1 полунормата на разликата $u^* - u$ е еквивалентно на минимизиране на функционала

$$S(u^*) = \int_a^b (u^{*'} - u')^2 dt, \quad (4.1.2-3)$$

където u е известна (дадена) функция, докато u^* е неизвестната (търсена) функция. Ако функцията u^* с фиксирани стойности в границите на интервала минимизира функционала (4.1.2-3), тогава е в сила следното уравнение на Ойлер-Лагранж:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(u^{*'}-u')^2}{\partial u^{*'}} \right) - \frac{\partial(u^{*'}-u')^2}{\partial u^*} = 0, \quad t \in (a,b). \quad (4.1.2-4)$$

Като извършим диференцирането относно $u^{*'}$ и u^* получаваме

$$2 \frac{d}{dt} (u^{*'}-u') = 0, \quad t \in (a,b). \quad (4.1.2-5)$$

Диференцираме относно t и получаваме

$$u^{*''} = u'', \quad t \in (a,b). \quad (4.1.2-6)$$

Забележка 4.1.2-1

(Минимизиране на H^1 полунормата при повече от две ограничения)

Като цяло, резултатът на теорема 4.1.2-1 за запазване на втората производна няма да е в сила, когато функцията u^* трябва да удовлетворява повече от две ограничения (например когато са наложени едно или повече ограничения в допълнение към двете гранични условия (4.1.2-1)).

4.1.3. H^1 -проекцията на решението на ЗНУ като приблизително решение на ГЗ

Както е доказано в предходния параграф, H^1 -проекцията u^* на решението u на ЗНУ трябва да удовлетворява

$$u^{*''} = u'', \quad t \in (a,b). \quad (4.1.3-1)$$

От друга страна решението u на ЗНУ удовлетворява диференциалното уравнение (4.1.1-1). Следователно, можем да се замени u'' в (4.1.3-1) с $f(t, u, u')$, след което да се развие f в ред на Тейлър около u^* получавайки

$$u^{*''} = f(t, u^*, u^{*'}) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*, u'=u^{*'}} (u - u^*) + \frac{\partial f}{\partial u'} \Big|_{u=u^*, u'=u^{*'}} (u' - u^{*'}) + \dots, \quad t \in (a,b). \quad (4.1.3-2)$$

От уравнение (4.1.3-2) се вижда, че ако v_a е близко до V_a , и следователно u^* е близко до u , то тогава u^* удовлетворява диференциалното уравнение (4.1.1-1) *приблизително*. Понеже u^* също удовлетворява граничните условия (4.1.1-3), то следва, че H^1 -проекцията u^* е приблизително решение на ГЗ (1.5-1), (1.5-2).

4.1.4. Извеждане на итерационната формула на стрелково-проекционния метод използвайки H^1 -проекцията на решението на ЗНУ

В този параграф е представен основният теоретичен резултат на настоящата дисертационна работа, а именно извеждане на стрелково-проекционна итерационна формула за корекция на началното условие.

Нека функцията $u(t; v_a)$ да бъде решение на следната ЗНУ

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b), \quad (4.1.4-1)$$

$$u(a; v_a) = u_a, \quad u'(a; v_a) = v_a, \quad (4.1.4-2)$$

където v_a е някаква, може и произволна, апроксимация на корена V_a (виж параграф 1.9).

Нека u^* да бъде H^1 -проекцията на решението u на ЗНУ (4.1.4-1), (4.1.4-2). Както доказахме в параграф 4.1.2 функцията u^* удовлетворява

$$u^{*''} = u'', \quad t \in (a, b), \quad (4.1.4-3)$$

$$u^*(a) = u_a, \quad u^*(b) = u_b. \quad (4.1.4-4)$$

Тъй като H^1 -проекцията u^* е приблизително решение на ГЗ (параграф 4.1.3) можем да използваме стойността на производната на u^* в първата граница като ново начално условие в *итеративна стрелкова процедура*. За да се получи стойността на производната на u^* в първата граница като функция на началното условие v_a , уравнение (4.1.4-3) трябва да бъде интегрирано. Първо, у-ние (4.1.4-3) се интегрира на интервала $[a, t]$ и се получава

$$u^{*'}(t) - u^{*'}(a) = u'(t; v_a) - u'(a; v_a). \quad (4.1.4-5)$$

След това, у-ние (4.1.4-5) се интегрира на интервала $[a, b]$ и се получава

$$u^*(b) - u^*(a) - u^{*'}(a)(b - a) = u(b; v_a) - u(a; v_a) - u'(a; v_a)(b - a). \quad (4.1.4-6)$$

Накрая, въвеждайки означението $u^{*'}(a) = v_a^*$ и използвайки граничните условия (4.1.4-4) и началните условия (4.1.4-2), изразът (4.1.4-6) се преобразува на

$$v_a^* = v_a - \frac{E(v_a)}{k}, \quad (4.1.4-7)$$

$$E(v_a) = u(b; v_a) - u_b, \quad (4.1.4-8)$$

където $E(v_a)$ е отклонението на решението на ЗНУ от второто гранично условие, а $k = b - a$. Формула (4.1.4-7) е итерационната формула за намиране на корена V_a на уравнението $E(v_a) = 0$ (виж параграф 1.9) по *стрелково-проекционния* метод. При зададено приближение v_a на търсения корен V_a , следващото приближение v_a^* се получава от формула (4.1.4-7). Тази формула е същата като формулата на другите стрелкови методи, единствено стойността на наклона k е различна, а именно $b - a$.

4.1.5. Извеждане на итерационната формула на стрелково-проекционния метод от формулата за последователно прилагане на линейния стрелкови метод по Пикард

В този параграф се представя алтернативно извеждане на итерационната формулата на стрелково-проекционния метод (4.1.4-7), използвайки изведената в глава 2 от дисертационния труд итерационна формула (2.3-13) за решаване на ГЗ чрез последователно прилагане на линейния стрелкови метод по Пикард.

Нека отново функцията $u(t; v_a)$ да е решение на ЗНУ (4.1.4-1), (4.1.4-2), където v_a е някакво приближение, може и произволно, на корена V_a на (1.9-8). Ако в (2.3-9) изберем това решение да е известната (дадена) функция u , и ако освен това изберем $\bar{v}_a = v_a$, тогава очевидно решението $\bar{u}$ на ЗНУ (2.3-9), (2.3-10) ще бъде решение на ЗНУ (4.1.4-1), (4.1.4-2), т.е. $\bar{u} \equiv u$. (4.1.5-1)

Следователно, Пикардовото приближено решение u^* (2.3-13) на ГЗ може да бъде написано като

$$u^*(t) = u(t; v_a) - \frac{E(v_a)}{k}(t - a), \quad (4.1.5-2)$$

$$E = u(b; v_a) - u_b, \quad k = b - a. \quad (4.1.5-3)$$

Диференцираме (4.1.5-2) спрямо t и получаваме

$$u^{*'}(t) = u'(t; v_a) - \frac{E(v_a)}{k}. \quad (4.1.5-4)$$

В първата граница, тоест в $t = a$, въвеждайки означението $u^{*'}(a) = v_a^*$, уравнение (4.1.5-4) се превръща в

$$v_a^* = v_a - \frac{E(v_a)}{k}. \quad (4.1.5-5)$$

Това е същата стрелково-проекционна итерационна формула (4.1.4-7) изведена в предходния параграф чрез директно интегриране на израза за запазване на втората производна (4.1.4-3). Накратко, вместо да използваме Пикардовото приближение u^* (4.1.5-2) на решението на ГЗ за нова апроксимационна функция u за (2.3-9), ние използваме уравнение (4.1.5-5) за да получим ново начално условие v_a^* и ‘стреляме’ отново за да получим ново ЗНУ решение. Процесът се повтаря до сходимост. Това е същата стрелково-проекционна итерационна процедура описана вече в предходния параграф.

Забележка 4.1.5-1

(H^1 -проекция и Пикардова апроксимация на ГЗ).

Като интегрираме (4.1.4-5) на $[a, t]$ получаваме

$$u^*(t) - u^*(a) - u^{*'}(a)(t - a) = u(b; v_a) - u(a; v_a) - u'(a; v_a)(t - a). \quad (4.1.5-6)$$

След това, използвайки граничните условия (4.1.4-4), началните условия (4.1.4-2), както и формула (4.1.4-7) получаваме

$$u^*(t) - \left(v_a - \frac{E(v_a)}{k} \right) (t - a) = u(t; v_a) - v_a(t - a), \quad (4.1.5-7)$$

което след преобразуване дава (4.1.5-2). Следователно, H^1 -проекцията на решението $u(t; v_a)$ на ЗНУ (4.1.4-1), (4.1.4-2) е просто Пикардовата апроксимация (4.1.5-2) на решението на ГЗ при зададена начална апроксимация $u(t; v_a)$.

4.2. Анализ и оценка на работата на стрелково-проеекционния метод

В този раздел се изследва сходимостта на предложения стрелково-проеекционен метод и се сравнява работата на метода с работата на другите разгледани в дисертацията стрелкови методи. Освен със стрелковите методи, методът е сравнен и с метода на крайните разлики. Представен е алгоритъм на стрелково-проеекционния метод.

4.2.1. Анализ на сходимост на стрелково-проеекционния метод

Итерационната формула на стрелково-проеекционния метод е

$$v_a^* = v_a - \frac{E(v_a)}{k}, \quad (4.2.1-1)$$

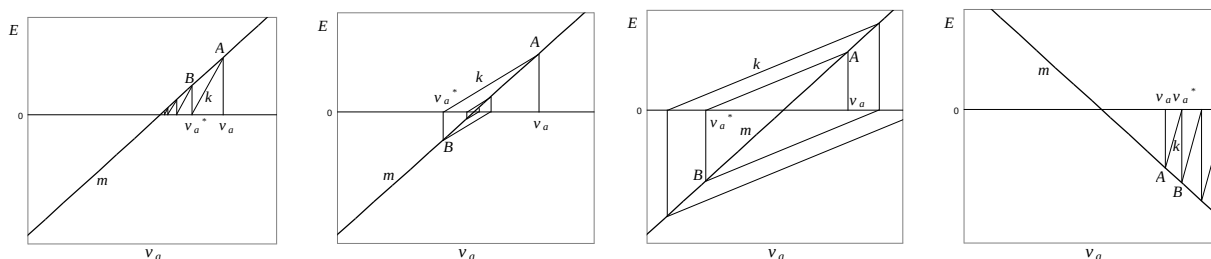
където $E(v_a)$ е отклонението на решението на ЗНУ от второто гранично условие, а $k=b-a$.

При зададено приближение v_a на търсения корен V_a , следващото приближение v_a^* се получава от формула (4.2.1-1). Тази формула е същата като формулата на другите стрелкови методи, единствено стойността на наклона k е различна, а именно $b-a$. Както при метода на простата итерация и метода на Нютон с постоянен наклон, стойността на k е фиксирана, но не е произволна, нито пък зависи от избора на начално условие, а идва от границите на задачата.

Итерация (4.2.1-1) е проста итерация, а $v_a - E(v_a)/k$ е нейната асоциирана итерационна функция. Понякога, (4.2.1-1) е наричана итерация по Пикард или функционална итерация за решението на $E(v_a)=0$ [87]. Ако $|dv_a^*/dv_a| < 1$ в някакъв интервал около корена на $E(v_a)=0$ и началното условие v_a е вътре в този интервал, тогава стрелково-проеекционната процедура сходя към корена. Подобно на метода на простата итерация и метода на Нютон с постоянен наклон [84-87], достатъчно близко до корена, стрелково-проеекционния метод е сходим когато

$$|1 - m/k| < 1, \quad (4.2.1-2)$$

където m е наклона на $E(v_a)$ в корена V_a . Тъй като $k > 0$, неравенство (4.2.1-2) води до следните четири възможни случая показани на фиг. 4.2.1-1.



Фиг. 4.2.1-1. Сходимость/разходимость на стрелково-проекционния метод за следните четири възможни случая: (а) сходимость за $k > m > 0$; (б) сходимость за $m/2 < k < m$; (с) разходимость за $k < m/2$; и (д) разходимость за $m < 0$.

Графиката на отклонението E като функция на началното условие v_a е показана на фиг. 4.2.1-1 (права линия минаваща през точките A и B). Точката A на фигурата съответства на първото (произволно избрано) начално условие v_a . Както може да се види от (4.2.1-1), новото начално условие v_a^* се получава като се прекара права с наклон $k=b-a$ през точката A . Следващото начално условие се получава като се прекара права със същия наклон k през точката B . Всяко следващо начално условие се намира по аналогичен начин. Така, коренът на $E(v_a)=0$ се получава чрез последователно конструиране на успоредни прави с наклон k , показани на фиг. 4.2.1-1 с тънки линии.

В обобщение, когато началното условие v_a е достатъчно близко до корена V_a стрелково-проекционния метод е сходим ако и само ако $0 < m < 2k$. Сходимостта е линейна освен когато $k=m$. Тогава сходимостта е квадратична.

По-общ начин да се изиска сходимость (и единственост на решението) е дясната страна на (4.2.1-1) да бъде контракция по цялата реална ос, т.е. за всяка стойност на v_a [87]. Тогава, независимо от какво начално условие v_a стартира итеративната процедура, методът е сходим.

4.2.2 Сравнение между стрелково-проекционния метод и стрелковите методи

Както при метода на простата итерация и метода на Нютон с постоянен наклон, стойността на k във формула (4.2.1-1) е постоянна, но не е произволна нито пък зависи от избора на начално условие, а идва от граничните условия. Както е показано в секция 4.2.3 Числени примери (примери 1, 2 и 3), съществуват случаи когато стрелково-проекционния метод, т.е. итерационна формула (4.2.1-1) с $k=b-a$, сходя докато другите два метода с фиксирана стойност на наклона k са разходими. В сравнение с методите, които променят k на всяка итерация, например метод на Нютон и метод на секущата, стрелково-проекционния метод може да се представи по-добре при специфични ситуации, такива като наличие на инфлексни точки или локални екстремуми на $E(v_a)$ в близост до корена V_a . Конкретни примери са представени в секция 4.2.3 Числени примери (примери 2 и 3).

Класическият стрелкови метод е на практика така наречената *обратна задача*, т.е. при наличие на някакъв краен резултат се опитваме да модифицираме условията в началото по такъв начин, че да получим желанния краен резултат. Както е добре известно обратната задача е често нестабилна или най-малкото особено чувствителна спрямо началните условия. Предложения стрелково-проекционен метод обаче проявява значителна стабилност в сравнение с другите стрелкови методи разгледани в настоящия дисертационен труд. Стабилността на метода е добре илюстрирана в пример 2 и особено в пример 3 на секция 4.2.3 Числени примери.

Итерационната формула на предложения стрелково-проекционен метод е на практика същата като формулата на метода на простата итерация, единствено стойността на k е различна. Това означава, че методът е изключително лесен за прилагане. Стрелково-проекционният метод не се нуждае от заграждане (т.е. локализиране) на корена преди започване на итеративната процедура за разлика от метода на бисекцията и метода на фалшивата позиция. Методът изисква само едно произволно избрано начално условие и численото решение на само една ЗНУ на всяка итерация включително първата. За сравнение с другите стрелкови методи може да се види таблица 1.9.2-1.

Някои недостатъци на стрелково-проекционния метод са следните: Сходимостта на метода не е гарантирана. В сравнение с метода на секущата и с метода на Нютон сходимостта е бавна. Въпреки това обаче, както е показано в секция 4.2.3 Числени примери, при определени ситуации методът работи по-добре не само от другите методи с фиксирана стойност на k , но и от метода на секущата и от метода на Нютон.

4.2.3. Числени примери

Стрелково-проекционният метод е тестван с различни ГЗ за ОДУ от втори ред. Първият пример демонстрира важността на използване на стойност $k=b-a$ във формула (4.2.1-1) вместо обикновено използваната от метода на простата итерация стойност $k=1$. Вторият пример демонстрира стабилността на предложения стрелково-проекционен метод около инфлексни точки на $E(v_a)$. Третият пример демонстрира стабилността на предложения метод около локални екстремуми на $E(v_a)$. Представянето на стрелково-проекционния метод е сравнено с представянето на другите разгледани в тази работа стрелкови методи, а за третия пример също и с метода на крайните разлики.

4.2.3.1. Пример 1 – важност на използване на наклон $b-a$

Разглежда се ГЗ

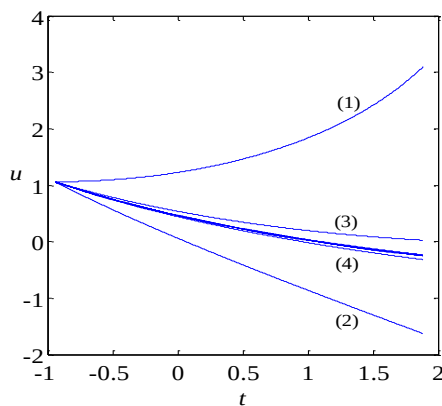
$$u'' = \frac{1}{8} \exp(u), \quad t \in (a, b), \quad u(a) = \bar{u}(a), \quad u(b) = \bar{u}(b), \quad (4.2.3.1-1)$$

$$\text{където } a = -2\sqrt{2}/3, b = 4\sqrt{2}/3, \text{ а } \bar{u}(t) = \ln\left(\frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t + \frac{13}{6}\right) + \frac{1}{2}\right) \quad (4.2.3.1-2)$$

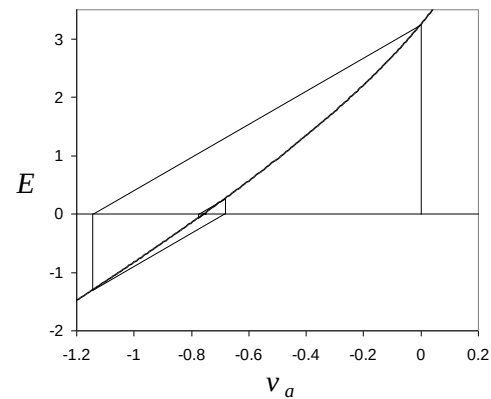
е точното (аналитично) решение на (4.2.3.1-1).

Започвайки от начално условие $v_a=0$, ГЗ (4.2.3.1-1) е решена със стрелково-проекционния метод. Решението е достигнато за 12 итерации с точност $|E|<0.000001$. Получената стойност за корена е $V_a=-0.7725$. Решението на ЗНУ на всяка стъпка е показано на фиг. 4.2.3.1-1.

На фиг. 4.2.3.1-2 е представена графика на функцията $E(v_a)$ (намерена числено) и последователността от успоредни прави с наклон $k=2\sqrt{2}$ водещи до корена на $E(v_a)=0$.



Фиг. 4.2.3.1-1



Фиг. 4.2.3.1-2

За същата ГЗ, методът на простата итерация със стойност на наклона $k=1$ дивергира.

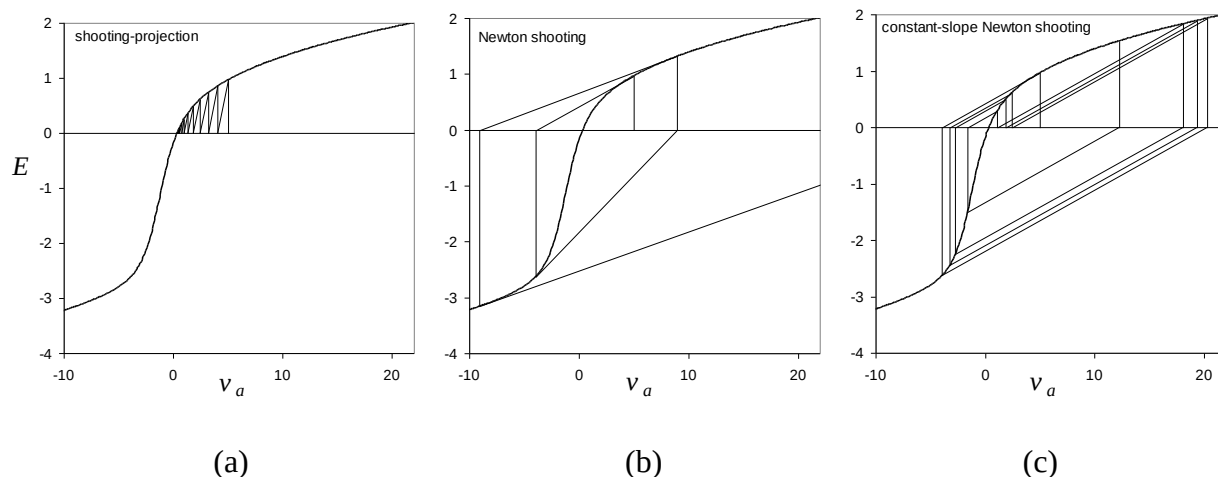
4.2.3.2. Пример 2 – стабилност на метода около инфлексни точки на отклонението като функция на началното условие

Разглеждаме ГЗ

$$u'' = -\frac{3u^2 u'}{t}, \quad t \in (1,2), \quad (4.2.3.2-1)$$

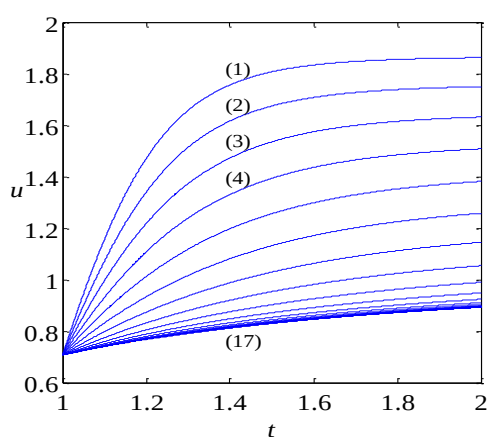
$$u(1) = 1/\sqrt{2}, \quad u(2) = 2/\sqrt{5},$$

$$\text{с точно решение } u(t) = t/\sqrt{1+t^2}. \quad (4.2.3.2-2)$$



Фиг. 4.2.3.2-1. Сходяща/разходяща последователност при итеративното решаване на ГЗ (4.2.3.2-1) с: (a) стрелково-проектионен метод; (b) метод на Нютон; и (c) метод на Нютон с постоянен наклон.

Функцията $E(v_a)$ за уравнение (4.2.3.2-1) е показана на фиг. 4.2.3.2-1. Поради наличието на инфлексна точка близо до корена V_a , методът на Нютон и методът на Нютон с постоянен наклон са разходящи за всяко стартово начално условие v_a извън тесен интервал около корена. За стартова стойност $v_a=5$ и двата метода дивергират както е показано на фиг. 4.2.3.2-1b и 4.2.3.2-1c, съответно. За разлика от тях стрелково-проектионният метод сходя за всяко стартово начално условие v_a . За същото стартово начално условие $v_a=5$ методът сходя за 17 итерации с точност $|E| < 0.001$ (виж фиг. 4.2.3.2-1a). Получената стойност за корена е $V_a=0.35$. Решението на ЗНУ на всяка итерационна стъпка е показано на фиг. 4.2.3.2-2.



Фиг. 4.2.3.2-2

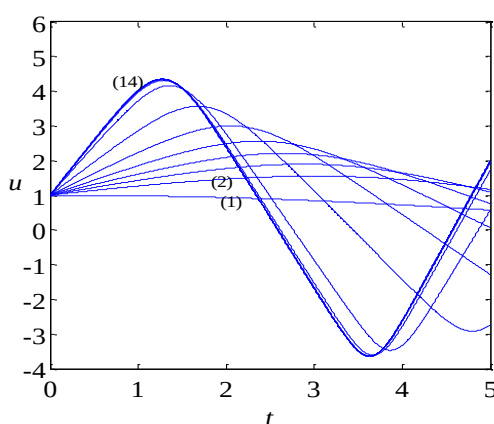
4.2.3.3. Пример 3 – стабилност на метода около локални екстремуми на отклонението като функция на началното условие

Разглеждаме

$$u'' = -\frac{1}{50}u \cosh\left(\frac{tu}{5} + u\right), \quad t \in (0,5), \quad (4.2.3.3-1)$$

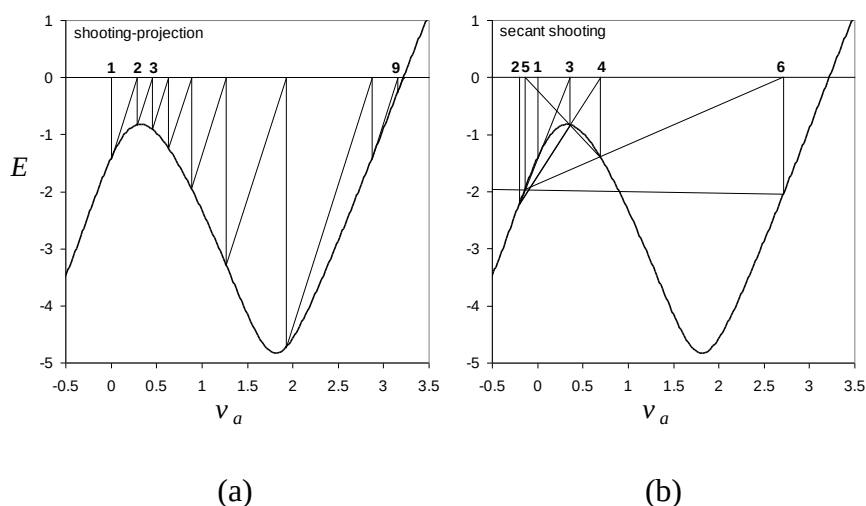
$$u(0)=1, \quad u(5)=2.$$

Стартирайки от начално условие $v_a=0$ стрелково-проекционния метод намира решение в 14 итерации с точност $|E|<0.0001$ (таблица 4.2.3.3-1). Решението на ЗНУ на всяка итерационна стъпка е показано на фиг. 4.2.3.3-1.



Фиг. 4.2.3.3-1. Еволюция на решението на ЗНУ при решаване на (4.2.3.3-1) със стрелково-проекционния метод. Решение на ГЗ се достига след 14 итерации.

Фигура 4.2.3.3-2а показва последователността от успоредни прави с наклон $k=5$ която води до корена на $E(v_a)=0$. Получената стойност за корена е $V_a=3.2232$. Последователните стойности на началното условие v_a на всяка итерация, намерени чрез формула (4.2.1-1), са отбелязани с 1,2,3,... на фигурата. Те съответстват на показаните на фиг. 4.2.3.3-1 решения на съответната ЗНУ. На фигура 4.2.3.3-2а се вижда, че функцията $E(v_a)$ има два локални екстремума между стартовото начално условие $v_a=0$ и корена. За разлика от другите методи, стрелково-проекционния метод не изпитва проблеми със сходимостта около такива екстремуми. Лесно е да се види, че методът ще намери корена за всяко стартово начално условие v_a в интервала показан на фигурата.



Фиг. 4.2.3.3-2. Сходимост/разходимост при итеративно решаване на (4.2.3.3-1) чрез:

(a) стрелково-проекционен метод; и (b) метод на секущата.

При стартиране на метода на секущата от правата линия минаваща през точките $(-0.2, E(-0.2))$ и $(0, E(0))$ методът дивергира по начин показан на фиг. 4.2.3.3-2b. Методът на Нютон със стартово начално условие $v_a=0$ също не успява да намери корена. Методът на простата итерация с наклон $k=1$ дивергира (за всички стартови начални условия). Методът на Нютон с постоянен наклон, ако бъде стартиран от кое да е начално условие v_a съответстващо на негативен наклон E или на ненегативен наклон E по-малък от $m/2$ [4], [5] също няма да намери корена на уравнението.

Разработена е MATLAB програма за решаване на ГЗ (4.2.3.3-1) по стрелково-проекционния метод (приложение – код 4.2.3.3-1).

4.2.4. Сравнение между стрелково-проекционния метод и метода на крайните разлики

Ще сравним стрелково-проекционния метод с метода на крайните разлики чрез решаване на конкретен пример. В предходния параграф, пример 3 се разглежда граничната задача

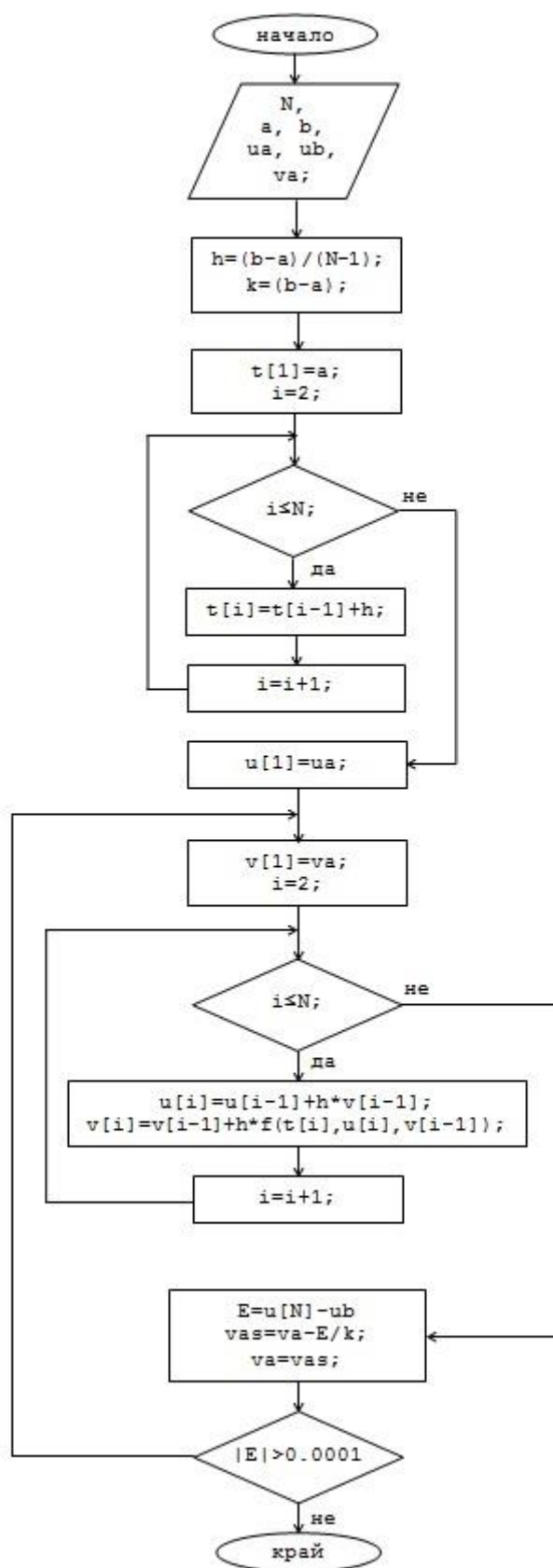
$$u'' = -\frac{1}{50}u \cosh\left(\frac{tu}{5} + u\right), \quad t \in (0,5), \quad (4.2.4-1)$$

$$u(0) = 1, \quad u(5) = 2.$$

Както се вижда за ГЗ (4.2.4-1), методът на простата итерация е разходящ за всяко стартово начално условие. Методът на секущата, методът на Нютон и методът на Нютон с постоянен наклон проявяват значителна нестабилност, неуспявайки да намерят корена при много стартови начални услови в интервала показан на фиг. 4.2.3.3-2. За разлика от тях стрелково проекционния-метод е стабилен и сходя към корена за всяко стартово

начално условие в същия интервал. За решаване на ГЗ (4.2.4-1) е приложен и методът на крайните разлики. Диференциалното уравнение в (4.2.4-1) е дискретизирано на различни равномерни мрежи, варирайки броя на мрежовите точки от 100 до 3000 през 100-200 точки. Получените алгебрични уравнения са допълнени с граничните условия. За решаване на така конструирани нелинейни системи са приложени итеративните методи на Якоби, Гаус-Зайдел, Пикард и Нютон. Всеки път за стартови начални функции (начални приближения) са пробвани различни функции включително решения $u(t;v_a)$ на ЗНУ при различни начални условия v_a . С изключение на случаите когато началното приближение е решение на ЗНУ с v_a много близко до корена V_a всички приложени процедури дивергират. Например, методът на крайните разлики по Нютон с 1001 мрежови точки стартиран от решението на ЗНУ с начално условията $v_a=3.1$ сходя в 6 итерации с точност $\varepsilon < 10^{-8}$ (фиг. 4.2.4-1а), но за стойности $v_a=3.0$ и по-ниски методът дивергира. За получаване на решенията $u(t;v_a)$ на ЗНУ е използван метода РК4 с 1001 мрежови точки.

4.2.5. Алгоритъм на стрелково-проекционния метод



4.3. Изводи към Глава 4

Дефинирана е H^1 -проекция на решението на задачата с начални условия (4.1.1). Показано е, че H^1 -проекцията представлява ограничено функционално подобие при наличие само на две гранични условия на Дирихле (забележка 4.1.1-1). Доказано е, че H^1 -проекцията запазва втората производна на преобразуваната функция (4.1.2). Доказано е, че H^1 -проекцията на решението на задачата с начални условия е приблизително решение на граничната задача (4.1.3). Интегрирайки резултата за запазване на втората производна (4.1.2-6) е изведена итерационна формула (4.1.4-7) за коригиране на началното условие. Получената формула е основния теоретичен резултат на настоящата работа. Формулата се използва за конструиране на стрелково-проеекционен метод за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред. В (4.1.5) е показано как формулата може да бъде получена и от изведената в настоящата работа формула за последователно прилагане на линейния стрелков метод по Пикард. Направен е анализ на сходимостта (4.2.1) на предложения стрелково-проеекционен метод и е направен сравнителен анализ (4.2.2) на метода с всички по-важни стрелкови методи. Предложения стрелково-проеекционен метод е тестван на конкретни гранични задачи (4.2.3). Приведените примери ясно демонстрират предимствата на метода при определени ситуации. В (4.2.3.1) е показано, че наличието на наклон със стойност $k=b-a$ в итерационната формула дава предимство на метода пред другите методи използващи постоянен наклон, а именно стрелковия метод по метода на простата итерация и стрелковия метод по метода на Нютон с постоянен наклон. Показано е, че при наличие на инфлексни точки (4.2.3.2) или локални екстремуми (4.2.3.3) на отклонението на решението на ЗНУ като функция на началното условие предложия стрелково-проеекционен метод е значително по-стабилен от стрелковия метод по метода на Нютон и стрелковия метод по метода на секущата. В последния пример методът е сравнен освен със стрелковите методи също така и с метода на крайните разлики (4.2.4). Показано е, че всички разгледани стрелкови методи и всички итеративни процедури по метода на крайните разлики не успяват да намерят решението при повечето начални условия. За разлика от тях стрелково-проеекционния метод намира решението за всяко начално условие в разгледания интервал.

Изводи по дисертационния труд

1. Представени са по-важните съществуващи числени методи за решаване на задачата с начални условия (ЗНУ) за обикновени диференциални уравнения от първи и втори ред и

граничната задача (ГЗ) за обикновени диференциални уравнения от втори ред. За ЗНУ са разгледани явния метод на Ойлер и явните методи на Рунге-Кута от втори, трети и четвърти ред. За ГЗ са разгледани метода на крайните разлики по Якоби, Гаус-Зайдел, Пикард и Нютон, квазилинеаризационния метод, колакационния метод, проекционния метод и стрелковия метод за линейни и нелинейни диференциални уравнения. За нелинейни уравнения са разгледани методите на: простата итерация, секущата, Нютон, Нютон с постоянен наклон, делене интервала наполовина и фалшивата позиция.

2. Предложен е алтернативен начин за извеждане на итерационните формули на метода на крайните разлики по Пикард и на метода на крайните разлики по Нютон, чрез използване на квазилинеаризационния метод (2.1), (2.2).

3. Предложена е замяна на метода на крайните разлики по Пикард и на метода на крайните разлики по Нютон с последователно прилагане на линейния стрелков метод (2.3), (2.4).

4. Разработен е метод за решаване на гранични задачи за ОДУ от втори ред използващ квазилинеаризация по Пикард с (i) колокационен метод (2.5) и (ii) проекционен метод (2.6). За базисни функции са използвани полиноми на Лежандър, а за извършване на проекциите са приложени асоциирани полиноми на Лежандър за опростяване на крайните формули.

5. Предложена е дефиниция за ограничено подобие на реални функции на една реална променлива на базата на условна минимизация на H^1 полунормата на разликата между дадена и търсена функция (3.1).

6. Задачата за ограничено функционално подобие е решена в затворен вид за мрежови функции при наличие единствено на линейни ограничения. Използван е метода на Лагранж на неопределените коефициенти за свеждане на задачата за търсене на условен минимум до задача с безусловен минимум. Получени са матрични формули (3.2-19), (3.2-21). Приведени са примери за намиране на най-подобната функция на дадена функция при наличие на две гранични условия (примери 3.1-1, 3.1-2, 3.1-3) и на две гранични и едно интегрално условие (пример 3.1-4). Показано е как получените формули могат да бъдат използвани за решаване на гранични задачи за ОДУ от втори ред (пример 3.3-1).

7. Дефинирана е H^1 -проекция на решението на задачата с начални условия (4.1.1) и е показано (забележка 4.1.1-1), че H^1 -проекцията представлява ограничено функционално подобие при наличие само на две гранични условия на Дирихле.

8. Доказано е (4.1.2), че H^1 -проекцията е трансформация, която запазва втората производна на преобразуваната функция.

9. Доказано е (4.1.3), че H^1 -проекцията на решението на задачата с начални условия е приблизително решение на граничната задача.

10. Интегрирайки резултата за запазване на втората производна (4.1.2-6) е изведена итерационна формула (4.1.4-7) за коригиране на началното условие. Получената формула е основния теоретичен резултат на настоящия дисертационен труд и лежи в основата на

предложения стрелково-проекционен метод за решаване на гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред (глава 4).

11. Показано е (4.1.5), че итерационната формула (4.1.4-7) може да бъде получена и от изведената в настоящата работа формула за последователно прилагане по Пикард на линейния стрелкови метод.

12. Направен е анализ на сходимостта на стрелково-проекционния метод (4.2.1). Изведени са условията при които метода е сходим. В близост до нулата на отклонението на решението на ЗНУ като функция на началното условие са представени четири характерни случая: трионообразна сходимост, спираловидна сходимост, трионообразна разходимост и спираловидна разходимост (фиг. 4.2.1-1).

13. Направен е сравнителен анализ на стрелково-проекционния метод с всички по-важни стрелкови методи (4.2.2) и метода на крайните разлики (4.2.4). Предложения стрелково-проекционен метод е тестван на конкретни гранични задачи (4.2.3). Приведените примери ясно демонстрират предимствата на метода при определени ситуации.

14. Показано е (4.2.3.1), че наличието на наклон със стойност $k=b-a$ в итерационната формула на стрелково-проекционния метод дава предимство на метода пред другите методи използващи постоянен наклон, а именно стрелковия метод по метода на простата итерация и стрелковия метод по метода на Нютон с постоянен наклон.

15. Показано е (4.2.3.2), (4.2.3.3), че при наличие на инфлексни точки или локални екстремуми на отклонението на решението на ЗНУ като функция на началното условие предложения стрелково-проекционен метод е значително по-стабилен от стрелковия метод по метода на Нютон и стрелковия метод по метода на секущата.

16. Показано е (4.2.3.2), (4.2.3.3), че при конкретни гранични задачи нито един от разгледаните съществуващи стрелкови методи и методи на крайните разлики не успяват да намерят решението при повечето начални условия. За разлика от тях стрелково-проекционният метод намира решението за всяко начално условие.

17. За всички разгледани съществуващи методи и всички предложени нови методи за гранични задачи са разработени програми на MATLAB (Приложение) и програмите са приложени за решаване на конкретни примерни задачи. Резултатите са представени таблично и графично.

Приноси на дисертационния труд

1. Направен е сравнителен анализ на всички по-важни числени методи за гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред, а именно: метод на крайните разлики, квазилинеаризационен метод, колокационен метод, проекционен метод и стрелкови метод.
2. Предложен е алтернативен начин за извеждане на итерационните формули на метода на крайните разлики по Пикард и по Нютон за нелинейни гранични задачи, чрез

използване на квазилинеризационния метод. Базирайки се на тези извеждания е предложена замяна на метода на крайните разлики по Пикард и по Нютон с последователно прилагане на линейния стрелков метод. Разработена е схема за решаване на нелинейни гранични задачи чрез квазилинеаризация по Пикард с (i) колокационен метод и (ii) проекционен метод за решаване на възникващите линейни подзадачи. За извършване на проекциите са използвани асоциирани полиноми на Лежандър, което опростява крайните формули. (Глава 2)

3. Предложена е дефиниция за ограничено функционално подобие чрез условна минимизация на H^1 полунормата на разликата между дадена и търсена функция. Задачата за ограничено функционално подобие на мрежови функции при наличие на линейни ограничения е решена в затворен вид, като е използван метода на Лагранж на неопределените коефициенти за свеждане на задачата към безусловен минимум. (Глава 3)
4. Разработен е нов стрелков метод, наречен *стрелково-проекционен*, за решаване на линейни и нелинейни гранични задачи за обикновени диференциални уравнения от втори ред, като е използвана H^1 проекция на решението на задачата с начално условие. Изведена е съответна итерационна формула за коригиране на началното условие. Изведената формула е основния теоретичен резултат на настоящия дисертационен труд. Показано е, че за определени гранични задачи предложения метод е значително по-стабилен (устойчив) от другите разгледани в тази работа стрелкови методи и от метода на крайните разлики за нелинейни гранични задачи. (Глава 4)
5. Разработени са алгоритми и съответни софтуерни решения на всички представени съществуващи методи и на всички предложени в тази работа методи. (Приложение).

Авторски публикации по дисертационния труд

- [1] Filipov, S. M., Atanasov, A., Gospodinov, I. D. (2016). Constrained functional similarity by minimizing the H^1 seminorm and applications to engineering problems, Journal of Science, Engineering, & Education, 1, (1), 61-67, University of Chemical Technology and Metallurgy
- [2] Filipov, S. M., Gospodinov, I. D., Faragó, I. (2017). Shooting-projection method for two-point boundary value problems, Applied Mathematics Letters, 72, 10-15, Elsevier