



ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ

И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”

Валентина Илиева Радева

**ОРБИТАЛНА ХАУСДОРФОВА ЗАВИСИМОСТ И УСТОЙЧИВОСТ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ
УРАВНЕНИЯ
С ПРОМЕНЛИВИ СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

за придобиване на образователната и научна степен „**доктор**”
по научна специалност 4.5 Математика (**Диференциални уравнения**)

Научни ръководители:

Проф. д-р Ангел Дишлиев

Доц. д-р Катя Дишлиева

Научно жури:

1. Доц. д-р Йорданка Ангелова- Председател
2. Проф. д.м.н. Виржиния Кирякова- Рецензент
3. Проф. д.м.н. Гани Стамов- Рецензент
4. Доц. д-р Катя Дишлиева
5. Доц. д-р Димитър Колев

София, 2014

Дисертационният труд е написан на 162 страници и съдържа 14 фигури. Цитирани са 287 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет за защита на заседание на катедра „Математика“, състояло се на 08.10.2014г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 11.12.2014 от 12:00 часа в зала 431, сграда „А“ на ХТМУ.
Материалите са на разположение на интересувашите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности“, стая 406, етаж 4, сграда „А“ на ХТМУ.

За удобство означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд съвпадат.

Уравненията, които се изследват в дисертацията, притежават следните основни характеристики. Те са:

- нелинейни;
- неавтономни;
- с променлива структура (с прекъсната дясна част);
- с импулсни въздействия.

Най-съществена особеност на изучаваните диференциални уравнения е наличието на импулсни въздействия. Ще отбележим, че по начина на определяне и математическото описание на импулсните въздействия този тип уравнения се делят на два основни класа:

- **Клас А:** Импулсните въздействия се дефинират с помощта на обобщени функции (от типа на функцията на P. Dirac);
- **Клас Б:** Импулсните въздействия се определят с помощта на нарастването на търсената функция в моментите на въздействие.

В дисертацията се изследват импулсни уравнения от втория тип (клас Б).

Началото на качествената теория на импулсните диференциални уравнения от разглеждания в дисертацията тип е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век (виж публикациите [36] и [37]). В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсни въздействия. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Въведените математически обекти се оказаха важни и интересни от теоретична гледна точка. Но все пак трябва да подчертаем, че преди всичко те са полезни при моделиране и изучаване на динамични процеси, подложени на „кратковременни въздействия“. В резултат на тяхната математическа адекватност към споменатите скокообразно развиващи се процеси се появили многобройни изследвания с приложен аспект. Тук ще посочим част от монографиите на български автори, отнасящи се за фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения (от разглеждания в настоящата дисертация тип) и техните приложения: Д. Байнов и В. Ковачев [86]; Д. Байнов, С. Костадинов и Н. Минх [106]; Д. Байнов и П. Симеонов [119], [120], [121], [122] и [123]; Д. Байнов и С. Христова [104]; V. Lakshmikantham, Д. Байнов и П. Симеонов [202]; Г. Стамов [254]; И. Стамова [261]; А. Дишлиев, К. Дишлиева и С. Ненов [155].

От многобройните монографични трудове, посветени на импулсните диференциални уравнения, с автори извън България, ще споменем: А. Самойленко и Н. Перестюк [51] и [244]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [39]; С. Борисенко, В. Косолапов и А. Оболенский [8]; А. Халанай и Д. Векслер [63]; С. Завалищин и А. Сесекин [21] и [280]; С. Завалищин, А. Сесекин и С. Дрозденко [20]; S. Pandit и S. Deo [237]; M. Benchohra, J. Henderson и S. Ntouyas [125].

Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три обобщени направления:

1. Изследвания на общи качества, характерни както за решенията на уравненията без импулси, така и за решенията на уравненията с импулсни въздействия (виж публикациите: [9], [10], [43], [44], [50], [52], [67], [83], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [96], [99], [101], [105], [107], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [145], [166], [171], [174], [175], [185], [186], [188], [190], [199], [200], [201], [226], [240], [249], [262], [267] и [273]);
2. Изследвания на специфични качества, характерни само за решенията на уравненията с импулсни въздействия (виж публикациите, които се отнасят за импулсни уравнения с

фиксиран момент на импулсни въздействия: [25], [26], [45], [66], [68], [77], [87], [100], [103], [108], [109], [116], [126], [130], [132], [167], [178], [179], [184], [186], [187], [197], [198], [206], [207], [217], [226], [232], [233], [234], [235], [236], [240], [250], [251], [252], [256], [260], [263], [264], [277], [278] и [286]). Отделно ще цитирме резултатите за импулсни уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия (виж публикациите: [53], [95], [102], [117], [127], [128], [129], [135], [138], [139], [146], [148], [149], [150], [151], [152], [153], [154], [158], [168], [169], [170], [224], [225], [228], [239], [257] и [271]);

3. Моделиране и оптимизиране на процеси от практиката с помощта на импулсни уравнения. Тук приоритетно ще посочим изследванията, в които изучаваните процеси могат да се опишат адекватно само чрез такъв тип уравнения (виж публикациите [7], [22], [23], [24], [27], [43], [54], [64], [74], [75], [78], [79], [80], [81], [82], [85], [97], [98], [124], [131], [133], [134], [140], [142], [143], [161], [162], [164], [165], [172], [173], [180], [181], [208], [211], [214], [216], [222], [227], [229], [242], [253], [255], [258], [259], [265], [268], [270], [275], [276], [283], [284] и [285]).

В следните монографии се изучават различни аспекти от теорията на системите диференциални уравнения с променлива структура: А. Филиппов [62]; А. Андронов, А. Витт и С. Хайкин [4], В. Бабицкий и В. Крупенин [6]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [39] и др.

Диференциалните уравнения с променлива структура са основен математически апарат в теорията на управлението. Тук ще посочим следните резултати: [1], [28], [30], [34], [35], [39], [49], [60], [61], [65], [136], [137], [177], [192] и [266].

Често срещани явления в природата, а също така и динамични процеси в контролираната от човека практика, притежават прекъснат характер на своето развитие. Естествено е тези явления и процеси да се описват (моделират) с помощта на частично непрекъснати функции. Приближаването на частично непрекъснатите функции с алгебрични многочлени, тригонометрични полиноми и други класове функции относно равномерното разстояние в общия случай е невъзможно. Причина за това твърдение са непреодолимите разлики (в термините на равномерното разстояние) между прекъснатите функции и функциите от апроксимиращия клас в околности на точките на прекъсване. Обикновено в такива случаи се прибегва към значително по-слаби метрики, като например метрики, базиращи се на различни интегрални разстояния. Типично е средно-квадратичното разстояние:

$$\rho_Q(f^*, f) = \left(\int_a^b (f^*(\tau) - f(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2},$$

където функциите $(f^*)^2, (f)^2 \in R[a, b]$, т.е. квадратите на функциите f^* и f са интегрируеми в Риманов смисъл в интервала $[a, b]$. Известно е, че частично непрекъснатите функции с интегрируем квадрат може да се приближат с произволна точност в средноквадратична метрика с алгебрични и тригонометрични полиноми (разбира се от достатъчно висока степен). За съжаление обаче, средноквадратичната метрика е «слаба» и не осигурява геометрична близост между приближаваната и приближаващата функция. С други думи, графиките на тези две функции може да са сравнително далече една от друга, въпреки, че средноквадратичното разстояние между тях е произволно малко. Ще обърнем внимание на факта, че А. Колмогоров през 1956 г. в своя статия [29] посочи необходимостта от използване на разстояние, което притежава следните две качества:

- Разстоянието да е адекватно при приближаване на прекъснати функции с точки на прекъсване от първи род (с краен скок в тези точки);
- Разстоянието да е по-fino (по-силно) от интегралните разстояния.

Разстояние, което поражда метрично пространство, удовлетворяващо изискванията, посочени по-горе, е въведено от Ю. Прохоров през 1956 г. в неговата работа [48]. Нека са дадени функциите $f^*: F^* \rightarrow R^n$ ($F^* \subset R$) и $f: F \rightarrow R^n$ ($F \subset R$). В общия случай дефиниционните множества са различни, т.е. $F^* \neq F$. Извършваме следната последователност от действия:

- От графиките G_{f^*} и G_f на функциите f^* и f премахваме изолираните точки и получаваме съответно множествата g_{f^*} и g_f ;
- Намираме множествата:

$$m_{f^*} = \inf \left\{ m; g_{f^*} \subset m \subset F^* \times R^n, m = \overline{m} \right\}$$

и

$$m_f = \inf \left\{ m; g_f \subset m \subset F \times R^n, m = \overline{m} \right\}.$$

С други думи, намираме минималните компактни множества, които съдържат редуцираните графики g_{f^*} и g_f , съответни на функциите f^* и f ;

- Намираме Хаусдорфовото разстояние между компактните множества m_{f^*} и m_f :

$$\rho_H(m_{f^*}, m_f) = \inf \left\{ r \in R^+; m_{f^*} \subset B_r(m_f), m_f \subset B_r(m_{f^*}) \right\}.$$

Последната константа е въпросното разстояние между функциите f^* и f .

Решенията на диференциалните уравнения с променливи структура и импулси са по-често непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които те са непрекъснати отляво. Да означим с $PW[a, b]$ множеството от всички функции от посочения по-горе вид, които са дефинирани в интервала $[a, b]$. Ясно е, че класът $PW[a, b]$ е по-тесен от множеството на всички прекъснати функции. Поради тази причина е естествено разстоянието между функциите от този клас да бъде избрано така, че да отразява специфичните особености на тези функции. В настоящия дисертационен труд считаме за целесъобразно метричното пространство, което съдържа функциите от класа

$$PW = \bigcup_{[a, b]} PW[a, b]$$

да е породено от Хаусдорфовото разстояние между графиките на тези функции. Нека $f^* \in PW[a^*, b^*]$ и $f \in PW[a, b]$. Тогава

$$\rho_H(f^*, f) = \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(f^*(t^*), f(t)), a^* \leq t^* \leq b^* \right\}, a \leq t \leq b \right\}, \right. \\ \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(f^*(t^*), f(t)), a \leq t \leq b \right\}, a^* \leq t^* \leq b^* \right\} \right\}.$$

Ще посочим още едно предимство на Хаусдорфовото разстояние, като се позовем на Б. Сендов (виж [58]).

«Отметим, что расстояние Хаусдорфа в известном смысле равноправно относительно координатных осей. Как известно ε -окрестность данной функции относительно равномерного расстояния получается варьированием точек ее графика только по направлению ординатной оси, а ε -окрестность данной функции относительно Хаусдорфова расстояния получается варьированием точек ее графика во всех направлениях на плоскости. Поскольку в приближенных вычислениях мы находим с некоторой ошибкой не только значение данной функции, но и аргумент, для которого находится это значение, тоже обычно задается с некоторой ошибкой, то при такой ситуации кажется более естественным пользоваться расстоянием Хаусдорфа.»

Върху различни аспекти на Хаусдорфовото разстояние и неговите приложения са посветени редица изследвания на български учени. Тук ще посочим част от тях: Б. Сендов [55], [56], [57], [238], [245] и [246]; В. Попов [46], [47] и [241]; А. Андреев [2] и [3]; Б. Боянов [11]; Т. Боянов [12] и [13]; В. Веселинов [14]; Г. Илиев [191]; С. Марков [31] и [218]; Б. Пенков [247]; П. Петрушев [41] и [42]; С. Ташев [40]; С. Троянски [46]; В. Христов [41] и др.

Въвеждането на Хаусдорфовата метрика в теорията и практиката на апроксимациите на функциите е свързано с имената на редица забележителни математици: Н. Ахиезер [5]; Г. Гасанов [15]; А. Гусеинов [17]; Е. Долженко [18]; Е. Севастьянов [19]; В. Мартынюк [32] и [33]; А. Панов [38]; С. Сулейманов [59] и др.

Ще посочим някои допълнителни съображения относно важността и необходимостта от изследванията, които са проведени в настоящия дисертационен труд. Както казахме в началото, основен обект на изследване са нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с променливи структура и импулси. Превключващите моменти (това са моментите, в които се осъществява смяната на дясната страна и импулсните въздействия) не са фиксирани. Това означава, че в общия случай тези моменти са различни за несъвпадащите решения. Може да се конструират елементарни примери, при които началните условия на две решения са произволно "близки" (но различни помежду си) и въпреки това съответните им превключващи моменти не съвпадат. Между другото, една от първите задачи при изследванията на този тип уравнения (с променливи превключващи моменти) е да се установят условия, които гарантират, че при "близки" начални точки (или други нефиксирани параметри, които са съществени и характерни за изучаваните уравнения) съответните превключващи моменти са също "близки". По друг начин казано, предварително трябва да се изследва въпросът за типа на зависимост на превключващите моменти относно началните условия. Тъй като в общия случай множествата от превключващи моменти на две несъвпадащи решения са различни, то е ясно, че в интервалите, заключени между съответните им превключващи моменти, едното от разглежданите решения е подложено на повече (по-точно с едно повече) импулсни въздействия. Това от своя страна означава, че "близостта" между двете решения в интервалите с краища, които съвпадат със съответните им превключващи моменти, е нарушена. В общия случай такава близост не съществува.

Посочените по-горе съображения показват, че е разумно да се изследва подходяща мярка на отдалеченост между решенията на диференциалните уравнения с импулсни въздействия, която задължително удовлетворява условията за разстояние. Тъкмо поради тази причина, в настоящото изследване се използва Хаусдорфово разстояние между решенията. Ще отбележим следните три важни съображения:

1. От една страна, използването на Хаусдорфовото разстояние в изследванията е съпътствано с преодоляването на значителни по обем технически трудности;

2. От друга страна, както отбелязахме по-горе, Хаусдорфовата мярка между различните решения удовлетворява условията на разстояние, което е безспорно предимство за използване и тълкуване на получените чрез нея резултати;
3. Освен това, Хаусдорфовото разстояние е адекватно и удобно за оценяване на разликата между прекъснати функции от тип, сходен на тази, който е характерен за решенията на импулсните диференциални уравнения с променливи импулсни моменти.

По-конкретно за функциите от този тип е характерно, че:

- Те са по части непрекъснати, т.е. точките на прекъсване са отделими;
- Функциите от този тип, които притежават близки изходни параметри, във всеки краен отворен интервал притежават равен брой съответни точки на прекъсване;
- Разликата между съответните точки на прекъсване на близките функции от описания тип е „съизмерима“ с равномерното разстояние между техните непрекъснати части.

Ще обърнем внимание, че решенията на импулсните диференциални уравнения с променливи импулсни моменти удовлетворяват няколко изисквания, посочени по-горе. Тогава, независимо от трудностите, посочени в точка 1, то като имаме предвид направени забележки в точките 2 и 3, достигаме до убеждението, че изследването на Хаусдорфовото разстояние между решенията на импулсните уравнения не е самоцелно, а е оправдано и полезно.

Основните цели на дисертационния труд са три:

1. Въвеждат се и се изследват нови класове нелинейни неавтономни диференциални уравнения с променливи структура и импулси, които представляват адекватен математически апарат при моделирането на прекъснати динамични процеси;
2. Въведени са и са изучени специфични свойства на горния тип диференциални уравнения. Тук ще акцентираме върху ключовите понятия:
 - орбитална Хаусдорфова зависисмост относно началните условия;
 - орбитална Хаусдорфова зависисмост относно разликата между последователни импулсни моменти;
 - орбитална Хаусдорфова зависисмост относно импулсните функции;
 - орбитална Хаусдорфова устойчивост.
3. Прилагане на резултатите върху известни математически модели. Като примери ще посочим:
 - импулсен математически модел от фармакокинетиката, описващ динамиката на лекарствената концентрация в кръвта на пациент;
 - импулсен математически модел на Лотка-Волтера от популационната динамика.

Изрично ще подчертаем, че проведените изследвания на някои свойства на моделите са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в дисертационния труд. Това се отнася и за останалите модели в дисертацията.

Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛНИ БЕЛЕЖКИ

Целта на разглежданията в тази глава е да се въведат някои основни понятия и твърдения, които ще са необходими при изследванията в следващите няколко глави.

В първия параграф на главата е направена класификация на импулсните диференциални уравнения в зависимост от начина на определяне на импулсните моменти (моментите, в които се осъществяват импулсните въздействия). Описани са общо 7 класа. Посочени са класовете, на които принадлежат уравненията, изучавани в дисертационния труд. Подробно са описани отделните елементи на импулсната система от разглежданите класове и са дефинирани решенията на съответните начални задачи.

Във втория параграф на главата са описани някои специфични особености и произтичащите от тях трудности, които съпътстват изследванията на уравненията от разглежданите в дисертацията класове. Накратко, най-важните и специфични за тези уравнения особености се заключават в следното:

- прекъснатост на решенията;
- наличие на ефекта "биене";
- "кондензация" на превключващите моменти;
- загуба на свойството автономност;
- сливане на решения;
- промяна на превключващите моменти при изменение на началното условие;
- промяна на превключващите моменти при изменение на параметри на системата;
- натрупване на грешки и др.

В третия параграф са описани процеси, които се моделират с помощта на импулсни уравнения, а също така процеси, които се описват чрез уравнения с променлива структура от изучаваните класове. Подробно е разгледан обобщен математически модел на Gompertz с променливи структура и импулси.

В четвъртия параграф са припомнени някои основни понятия и твърдения, които се използват в следващите глави.

В последния параграф на главата изследванията са посветени на Хаусдорфовото разстояние между множества. Намирането на горни оценки на това разстояние между параметрично зададени криви е важна задача, решаването на която подготвя следващите изследвания в дисертационния труд. За удобство, по-нататък ще считаме, че дефиниционният параметър при тези параметрично зададени криви отчита времето. Качествените изследвания, свързани с орбиталната Хаусдорфова зависимост и устойчивост на решенията на диференциални уравнения с променливи структура и импулси може да стартира след намирането на споменатите по-горе оценки. Известно е, че траекториите на тези уравнения са по части непрекъснати криви, които са непрекъснати отляво в съответния им интервал на съществуване. Точките им на прекъсване са от първи род. В случая, когато диференциалните уравнения са с променливи импулсни моменти, техните несъвпадащи решения притежават различни множества от точки на прекъсване. Поради това, в работата се изследва и оценява Хаусдорфовото разстояние между параметрично зададени криви, които са по части непрекъснати отляво и които притежават специфични (собствени) моменти на прекъсване от първи род.

Използването на Хаусдорфовата метрика при изучаване на различни въпроси от фундаменталната и качествената теория на диференциалните уравнения (с импулси и без импулси) може да се види в работите [69], [70], [71], [155], [156], [160], [177], [203], [205] и [218].

Разглежданите в дисертацията уравнения се състоят от следните структурно-определящи елементи:

1. Съвкупност от системи нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения, описващи непрекъснатите етапи от динамиката на моделираните процеси:

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

където:

- функциите $f_1, f_2, \dots \in C[R^+ \times D, R^n]$, т.е. десните страни на горните системи са непрекъснати функции в дефиниционното си множество,

- фазовото пространство D е непразна област от R^n ;

2. Условия за последователно определяне на моментите на:

- смяна на структурата на системата от диференциални уравнения (смяна на дясната страна),

- импулсни въздействия върху решението.

Ще отбележим, че двата типа моменти съвпадат помежду си и както казахме по-горе се наричат с общото наименование моменти на превключване. Те са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$(1.2) \quad \varphi_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $x = x(t)$ е решението на съответната начална задача на системата диференциални уравнения от предходната точка, а функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ се наричат превключващи функции. Те са съответни за всяка една дясна страна и са непрекъснати във фазовото пространство, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[D, R]$. Моментите на превключване означаваме с $t_1, t_2, \dots$ и предполагаме, че са валидни неравенствата $t_1 < t_2 < \dots$. Изпълнени са равенствата

$$\varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots;$$

3. Импулсни функции, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват с помощта на нарастванията на търсената функция в превключващите моменти. Имаме:

$$(1.3) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots.$$

Импулсните функции $I_1, I_2, \dots$ са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданите системи с променливи структура и импулси, т.е. $I_1, I_2, \dots \in C[D, R^n]$.

Като вземем под внимание равенствата (1.1), (1.2) и (1.3), съответната начална задача можем да формулираме както следва:

$$(1.4) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0;$$

$$(1.5) \quad x(t + 0) = x(t) + I_i(x(t)), \quad \varphi_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$(1.6) \quad x(t_0) = x_0.$$

Решението $x(t; t_0, x_0)$ на разглежданата начална задача е частично непрекъснатата функция с точки на прекъсване от първи род, в които е непрекъснатата отляво. По-точно имаме:

1.1. При $t_0 \leq t < t_1$ решението на задачата (1.4), (1.5), (1.6) съвпада с решението на задачата (без импулси) (1.4), (1.6) и е валидно неравенството $\varphi_1(x(t; t_0, x_0)) \neq 0$;

1.2. В момента t_1 са изпълнени равенствата:

$$x(t_1; t_0, x_0) = x(t_1 - 0; t_0, x_0) = x_1 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x(t_1; t_0, x_0)) = \varphi_1(x_1) = 0;$$

1.3. Освен това в момента t_1 имаме

$$\begin{aligned} x(t_1 + 0; t_0, x_0) &= x(t_1; t_0, x_0) + I_1(x(t_1; t_0, x_0)) \\ &= (Id + I_1)(x(t_1; t_0, x_0)) \\ &= (Id + I_1)(x_1) = x_1^+; \end{aligned}$$

2.1. При $t_1 < t \leq t_2$, решението на задачата (1.4), (1.5), (1.6) съвпада с решението на система (1.1) с начално условие $x(t_1 + 0) = x_1^+$ и е валидно неравенството $\varphi_2(x(t; t_0, x_0)) \neq 0$;

2.2. В момента t_2 са изпълнени равенствата

$$x(t_2; t_0, x_0) = x(t_2 - 0; t_0, x_0) = x_2 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x(t_2; t_0, x_0)) = \varphi(x_2) = 0;$$

2.3. Имаме

$$\begin{aligned} x(t_2 + 0; t_0, x_0) &= x(t_2; t_0, x_0) + I_2(x(t_2; t_0, x_0)) \\ &= (Id + I_2)(x_2) = x_2^+ \end{aligned}$$

и т.н.

Специфичните особености, свързани с изследването на системите с променливи структура и импулси, а също така и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

1. Прекъснатост на решението на съответната начална задача: Точките на прекъсване са от първи род, това означава, че „скаокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие, т.е. точките на превключване;
2. Наличие на ефекта „биеене“: Характерен е за системите от трети и пети тип. В този случай, траекториите (ако изучаваната системата е от тип 3) или интегралните криви (ако системата е от тип 5) срещат безбройно много пъти едно и също превключващо множество. Нещо повече, ефектът „биеене“ е валиден и в случаите, когато същинска част от тези траектории и интегрални криви притежават описаното по-горе свойство. При наличие на ефекта биеене, може да се достигне до ситуация, при която превключващите моменти на дадено решение притежават точка на съгъстяване. Такова решение се нарича „биещо решение“. Точката на съгъстяване е специфична за всяко биещо решение. Ясно е, че всяко решение, за което собствените му превключващите моменти притежават точка на съгъстяване, не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че биещите решения „загиват“. Поради тази причина, при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни важни аспекти от качествената теория на този тип системи. В това число попадат всички свойства, които изискват съществуване на решението в произволен интервал. Като примери ще посочим свойствата: непрекъсната зависимост, периодичност, устойчивост и други подобни;
3. Наличие на „кондензация“ на превключващите моменти: В този случай превключващите моменти притежават крайна граница, независимо, че решението може да не е биещо. Тази граница е специфична за всяко конкретно решение. Такива решения се наричат „кондензиращи решения“. Това означава, че кондензиращите решения не са продължими надясно от съответната им гранична точка. Както и в предходната ситуация заключаваме, че решението „загива“.
4. Загуба на свойството автономност: Независимо, че е възможно десните страни на разглежданите системи да не зависят от времето, то решенията на съответните начални задачи са функции на началния момент. Действително, лесно се съобразява, че решенията зависят от моментите на превключване. От своя страна, превключващите моменти се получават като решения на алгебрични уравнения, в които участва решението. По този начин достигахме до извода, че решението зависи съществено от началния момент;

5. Сливане на решения: Обикновено сливанията се осъществяват в резултат на импулсни въздействия. Най-често тези сливащи импулсни въздействия са само върху едно от сливащите се решения. Възможно е сливане на решения след едновременни импулсни въздействия върху двете решения. Ще отбележим, че в последния случай импулсната функция не е биективна;
6. Промяна на превключващите моменти при промяна на началното условие: Различните решения (с начални условия, които не съвпадат) имат различни превключващи моменти. Нещо повече, възможно е при едно от тези решения да липсват превключващи моменти и следователно решението да е непрекъсната функция в дефиниционния си интервал. Такъв е случаят на нулевото решение, което не е подложено на импулсни въздействия;
7. Промяна на превключващите моменти при смущаване на елементи на системата: Както казахме по-горе, в общия случай решенията на изследваната начална задача и на съответната смутена начална задача (при едни и същи начални условия) имат различни превключващи моменти. Този факт означава, че съответните им импулсни въздействия са различни по големина и направление;
8. Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при определяне на моментите на смяната на структурата (десните страни на системите), както и при определяне на големините и направленията на импулсните въздействия, се „натрупват“ във времето. В някои случаи се оказва, че тези натрупани неточности оказват съществено влияние при пресмятане на стойностите на решението. Също така, те могат да изменят и неговото поведение. Може да се попадне в ситуации, при които разликата между „пертурбираното“ решение (получено в резултат на натрупаните грешки) и изучаваното „непертурбирано“ решение е съществена и води до изменения на свойствата им. Например, пертурбираното решение може да е неустойчиво, а изследваното решение да е устойчиво или обратното и т.н.

Този тип уравнения (с променливи структура и импулси) са удобен математически апарат за моделиране на динамични процеси, които се характеризират със следните две особености:

- Процесите са подложени на „кратковременни и интензивни“ външни въздействия (смущения, пертурбации). Предполага се, че времетраенето на външните смущения е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса. Поради тази причина се счита, че те се извършват мигновено под формата на импулси;
- Непосредствено след тези импулсни пертурбации изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нови, различни от предходните, правила и закони.

Ще отбележим (потвърдено от много автори), че интензивното развитие на теорията на диференциалните уравнения с импулси и с постоянна структура се дължи на многобройните им приложения. Тук ще посочим:

- действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия;
- колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения;
- ударен модел на часовников механизъм;
- виброударни системи;
- билиардни движения на материални точки;
- релаксионни колебания на електромеханични системи;
- електронни схеми;
- затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия;
- динамиката на системи за автоматично регулиране;
- смущения в клетъчни невронни мрежи;

- импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen;
- импулсни външни намеси и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирани популации;
- загиване на популации в резултат на импулсни въздействия;
- импулсни външни намеси и оптимизационни задачи в популационната динамика на общества от тип хищник-жертва;
- импулсни лекарствени въздействия в епидемиологията;
- „шокови“ изменения на цените на затворените пазари и др.

Както казахме по-горе, приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура и без импулсни въздействия са предимно в теорията на управлението. Освен това, с помощта на такива уравнения се изучават:

- задачи от фармакокинетиката;
- управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения;
- преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност;
- изменението на скоростите на химични реакции при прибавянето или отнемането на катализатори и др.

В настоящата дисертация са съчетани тези два типа диференциални уравнения.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси със смяна на законите на развитие е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с променливи структура и импулси, като правило, е задължително.

Ще използваме следните означения. Нека точките $a(a^1, a^2, \dots, a^n)$, $b(b^1, b^2, \dots, b^n)$

$\in R^n$. Тогава тяхното скалярно произведение ще бележим както следва

$$\langle a, b \rangle = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^n b^n.$$

Евклидовото разстояние между тези точки ще означаваме така

$$\rho(a, b) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + (a^2 - b^2)^2 + \dots + (a^n - b^n)^2}.$$

Евклидовата норма на точката a е равна на

$$\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + \dots + (a^n)^2}.$$

Нека непразните множества $A, B \subset R^n$. Тогава Евклидовото и Хаусдорфовото разстояние между тях означаваме съответно с

$$\rho_E(A, B) = \inf \{ \inf \{ \rho(a, b), a \in A, b \in B \} \}$$

и

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup \{ \inf \{ \rho(a, b), a \in A, b \in B \} \}, \right. \\ \left. \sup \{ \inf \{ \rho(a, b), b \in B, a \in A \} \} \right\}.$$

Ако поне едно от множествата A и B е празно, то за удобство ще считаме, че

$$\rho_E(A, B) = 0 \text{ и } \rho_H(A, B) = 0.$$

По-нататък с ∂A и $\bar{A}$ ще бележим съответно контура и затворената обвивка на множеството A . Нека $r = \text{const} > 0$. Тогава следното множество

$$B_r(A) = \bigcup_{a \in A} \{x \in R^n; \rho(x, a) \leq r\}$$

се нарича r -околност на A .

Забележка 1.3. Валидни са следните свойства на Хаусдорфовото разстояние между множества от R^n (за аналогични резултати виж [58]). Нека множествата $A, B, C \subset R^n$ и константата $\lambda \in R^+$.

Тогава:

1. $\rho_H(A, B) \geq 0$;
2. $\rho_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
3. $\rho_H(A, B) = \rho_H(B, A)$;
4. $\rho_H(\lambda A, \lambda B) = \lambda \rho_H(A, B)$;
5. $\rho_H(A \cup C, B \cup C) = \rho_H(A, B)$;
6. $\rho_H(A, B) \leq \rho_H(A, C) + \rho_H(C, B)$;
7. $\rho_H(\overline{A}, \overline{B}) = \rho_H(A, B)$;
8. Ако множествата A и B са ограничени, то $\rho_H(A, B) < \infty$;
9. Ако множеството A е ограничено и $\rho_H(A, B) < \infty$, то множеството B е също ограничено;
10. $\rho_H(A, B) = \inf \{r \in R^+; A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}$.

Ще припомним, че Свойство 10 често се използва като дефиниционно равенство на Хаусдорфовото разстояние между две множества.

Най-важните резултати в първа глава са следните теореми.

Теорема 1.4. Нека множествата $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k \subset R^n$ са ограничени.

Тогава

$$\begin{aligned} & \rho_H(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k, B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \\ & \leq \max \{ \rho_H(A_1, B_1), \rho_H(A_2, B_2), \dots, \rho_H(A_k, B_k) \}. \end{aligned}$$

Нека функциите $g, g^*: R^+ \rightarrow R^n$ и константите $T_0, T_1, T_0^*, T_1^* \in R^+$. Въвеждаме параметричните криви:

$$\gamma[T_0, T_1] = \begin{cases} \{g(t); T_0 \leq t \leq T_1\}, & T_0 \leq T_1; \\ \emptyset, & T_0 > T_1 \end{cases}$$

и

$$\gamma^*[T_0^*, T_1^*] = \begin{cases} \{g^*(t); T_0^* \leq t \leq T_1^*\}, & T_0^* \leq T_1^*; \\ \emptyset, & T_0^* > T_1^*. \end{cases}$$

По аналогичен начин се въвеждат кривите:

$$\gamma(T_0, T_1], \gamma[T_0, T_1), \gamma(T_0, T_1), \gamma^*(T_0^*, T_1^*], \gamma^*[T_0^*, T_1^*), \gamma^*(T_0^*, T_1^*),$$

които са дефинирани съответно в полуотворени и отворени интервали.

Забележка 1.4. Нека $0 \leq T_0 \leq T_1$ и $0 \leq T_0^* \leq T_1^*$. Валидни са следните дефиниционни равенства, отнасящи се съответно за Евклидовото, Хаусдорфовото и равномерно разстояние между кривите $\gamma^*[T_0^*, T_1^*]$ и $\gamma[T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned} \rho_E(\gamma^*[T_0^*, T_1^*], \gamma[T_0, T_1]) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \rho(g^*(t^*), g(t)), T_0^* \leq t^* \leq T_1^* \right\}, T_0 \leq t \leq T_1 \right\}; \\ \rho_H(\gamma^*[T_0^*, T_1^*], \gamma[T_0, T_1]) &= \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(g^*(t^*), g(t)), T_0^* \leq t^* \leq T_1^* \right\}, T_0 \leq t \leq T_1 \right\}, \right. \\ &\quad \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho(g^*(t^*), g(t)), T_0 \leq t \leq T_1 \right\}, T_0^* \leq t^* \leq T_1^* \right\} \right\}; \\ \rho_R(\gamma^*[T_0^*, T_1^*], \gamma[T_0, T_1]) &= \sup \left\{ \rho(g^*(t), g(t)), T_0 \leq t \leq T_1 \right\}. \end{aligned}$$

Ще използваме означенията:

$$T_0^{\min} = \min \{T_0^*, T_0\}, T_0^{\max} = \max \{T_0^*, T_0\}, T_1^{\min} = \min \{T_1^*, T_1\}, T_1^{\max} = \max \{T_1^*, T_1\}.$$

Теорема 1.8. Нека:

1. Функциите $g, g^*: R^+ \rightarrow R^n$ и са непрекъснати отляво в дефиниционното множество.
2. Валидно е неравенството $T_0^{\max} \leq T_1^{\min}$.

Тогава е в сила оценката:

$$\begin{aligned} \rho_H(\gamma^*(T_0^*, T_1^*), \gamma(T_0, T_1)) &\leq \max \left\{ \rho_R(\gamma^*(T_0^{\max}, T_1^{\min}), \gamma(T_0^{\max}, T_1^{\min})), \right. \\ &\quad \rho_H(g(T_0 + 0), \gamma^*(T_0^*, T_0)), \rho_H(g^*(T_0^* + 0), \gamma(T_0, T_0^*)), \\ &\quad \left. \rho_H(g(T_1), \gamma^*(T_1, T_1^*)), \rho_H(g^*(T_1^*), \gamma(T_1^*, T_1)) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 1.13. Нека:

1. Функциите $g, g^*: R^+ \rightarrow R^n$ са непрекъснати отляво в R^+ .
2. Съществува номер $k \in N$, такъв че са валидни неравенствата:

$$\begin{aligned} 0 < t_0^* < t_1^* < \dots < t_k^*; \quad 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k; \\ 0 < t_0^{\max} < t_1^{\min} \leq t_1^{\max} < t_2^{\min} \leq t_2^{\max} < \dots < t_k^{\min} \leq t_k^{\max}, \end{aligned}$$

където

$$t_0^{\min} = \min \{t_0^*, t_0\}, t_0^{\max} = \max \{t_0^*, t_0\}, \dots, t_k^{\min} = \min \{t_k^*, t_k\}, t_k^{\max} = \max \{t_k^*, t_k\}.$$

Тогава е в сила оценката:

$$\begin{aligned} \rho_H(\gamma^*(t_0^*, t_k^*), \gamma(t_0, t_k)) &\leq \max \left\{ \rho_R(\gamma^*(T_{i-1}^{\max}, T_i^{\min}), \gamma(T_{i-1}^{\max}, T_i^{\min})), \right. \\ &\quad \left. \rho_H(g(T_{i-1} + 0), \gamma^*(T_{i-1}^*, T_{i-1})), \rho_H(g^*(T_{i-1}^* + 0), \gamma(T_{i-1}, T_{i-1}^*)), \right. \end{aligned}$$

$$\rho_H \left(g(T_i), \gamma^*(T_i, T_i^*) \right], \rho_H \left(g^*(T_i^*), \gamma(T_i^*, T_i) \right], i = 1, 2, \dots, k \}.$$

Глава 2. ОРБИТАЛНА ХАУСДОРФОВА ЗАВИСИМОСТ НА РЕШЕНИЯТА НА КЛАС НЕАВТОНОМНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛСИ

Всички класове импулсни диференциални уравнения (ИДУ) могат да се причислят към една от следните две групи:

- ИДУ с фиксирани импулсни моменти;
- ИДУ с променливи импулсни моменти.

Ще казваме, че импулсните моменти са променливи, ако те са специфични за всяко решение. Това означава, че в общия случай множествата от импулсни моменти, съответни на несъвпадащи решения, са различни. В частност, при ИДУ с променливи импулсни моменти, основното решение и съответното му смутено решение (двете решения се получават при различни начални условия или параметри на уравнението) притежават различни импулсни моменти.

Ясно е, че в интервалите между съответните импулсни моменти на основното и смутеното решения, двете решения са подложени на различен брой импулсни въздействия. По-конкретно, нека означим импулсните моменти на изходното решение $x(t; t_0, x_0)$ с $t_1, t_2, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots$), а импулсните моменти на смутеното решение $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ с $t_1^*, t_2^*, \dots$ ($t_1^* < t_2^* < \dots$). Тогава в интервалите: между t_1 и t_1^* , между t_2 и t_2^* и т.н. едното от двете решения е подложено на едно импулсно въздействие повече, отколкото другото решение. Това означава, че в посочените интервали не може да се очаква „близост“ между тях. Образно казано, разликата между решенията в тези интервали ще е от порядъка на „големината“ на импулсните въздействия. Освен това, тези (в общия случай) сравнително големи разлики между решенията в споменатите интервали, не зависят съществено от близостта на параметрите на съответните им начални задачи. Поради тази причина в повечето изследвания на такива уравнения се въвежда следната мярка $m(\dots)$ за отклонение на смутеното решение $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ от изходното решение $x(t; t_0, x_0)$ в произволен ограничен или неограничен интервал:

$$m(x^*(t; t_0^*, x_0^*), x(t; t_0, x_0)) = \sup \left\{ \|x^*(t; t_0^*, x_0^*) - x(t; t_0, x_0)\|, \max \{t_0^*, t_0\} = t_0^{\max} \leq t \leq t_0^{\max} + T, |t - t_i| > \eta, i = 1, 2, \dots \right\},$$

където:

- (t_0^*, x_0^*) и (t_0, x_0) са съответните начални точки на двете решения;
- $\eta > 0$ е радиусът на околностите на импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$, в които не се отчита разликата между двете решения;
- T е положителна константа (възможно е $T = \infty$).

Както се вижда от горната дефиниция на мярката $m(\dots)$, в симетрични околности на импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ (с радиуси η) не се изисква близост между $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ и $x(t; t_0, x_0)$. За повече подробности вижте монографията [51]. Една от първите задачи при изследването на такъв клас уравнения е да се намерят достатъчни условия, при които разликата между съответните импулсни моменти на изходното и смутеното решения са произволно близки. С други думи, да се установят условия, при които:

$$(\forall \eta = \text{const} > 0) \Rightarrow |t_i^* - t_i| < \eta, i = 1, 2, \dots$$

Като имаме предвид дефиницията на $m(\dots)$, достигаме до извода, че:

- тази мярка е аналог на класическото равномерно разстояние;
- специфична нейна особеност (и същевременно слабост) е отстраняването от участие във формирането на големината на мярката на времевите интервали между съответните импулсни въздействия.

Поради тази причина, мярката $m(.,.)$ не удовлетворява условията за разстояние.

Действително, посочените по-горе околности на импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$:

$$B_\eta(t_i) = \{t; |t - t_i| < \eta\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

включват в себе си интервалите, заключени между съответните импулсни моменти. Следователно, равномерното разстояние между решенията може да е сравнително голямо в тези интервали. Както казахме по-горе, това разстояние е съизмеримо с големините на импулсните въздействия. Тази разлика обаче не се отчита в посочената мярка $m(.,.)$.

Направената по-горе бележка мотивира изследванията в първия параграф на главата. Тук мярката между двете решения на ИДУ с променливи импулсни моменти се дава в целия дефиниционен интервал с помощта на Хаусдорфовото разстояние между съответните им траектории. Разгледан е клас ИДУ, при който разликата между всеки два последователни импулсни моменти е постоянна величина d . Въведено е понятието орбитална Хаусдорфова зависимост на решенията на споменатия клас ИДУ относно началната точка и разликата d . Намерени са достатъчни условия за съществуване на такава зависимост.

Във втория параграф на главата получените резултати за орбитална Хаусдорфова зависимост относно началната точка и разликата между последователните импулсни моменти са приложени за решенията на модел от фармакокинетиката. Неизвестната функция в модела представлява концентрацията на лекарствено средство в кръвта на пациента. Предполага се, че вливането на лекарството се извършва под формата на импулси. Най-напред са намерени ограничения, при които решението принадлежи на предварително фиксиран затворен интервал (наречен терапевтичен прозорец). Импулсните смущения (вливанията на лекарственото средство) се осъществяват в моментите, в които концентрацията достига долната граница на терапевтичния прозорец. Импулсните въздействия „преместват решението“ мигновено от долната граница в горната граница на терапевтичния прозорец. Оказва се, че при така дефинирания динамичен модел на терапевтична манипулация импулсните моменти (моментите на вливанията на лекарството) са равномерно отдалечени един от друг. Нещо повече, решението на съответната начална задача е периодична функция, която е частично непрекъсната. В точките на прекъсване решенията са непрекъснати отляво. Оказва се, че решенията са орбитално Хаусдорфова зависими относно началната точка и разликата между последователните импулсни моменти. Накрая на параграфа са дадени съответните тълкувания на получените резултати от фармакокинетична гледна точка.

Обект на изследване е следната начална задача за системи ИДУ, която по-нататък ще наричаме основна:

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t_{i-1} < t \leq t_i = t_{i-1} + d;$$

$$(2.2) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$(2.3) \quad x(t_0) = x_0,$$

където:

- функцията $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- D е непразна област от R^n ;
- импулсните функции $I_i: D \rightarrow R^n$, $(Id + I_i): D \rightarrow D$, $i = 1, 2, \dots$;
- Id е идентитетът в R^n ;

- константата $d > 0$ е разликата между всеки два последователни импулсни моменти;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$.

Моментите $t_1, t_2, \dots$ се наричат импулсни. Решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е частично непрекъсната функция с точки на прекъсване $t_1, t_2, \dots$, в които решението е непрекъснато отляво. Освен това се вижда, че моментите на превключване зависят от решението и в общия случай са различни за несъвпадащите решения. По-нататък ще използваме означенията:

$$x_i = x(t_i; t_0, x_0);$$

$$x_i^+ = x(t_i; t_0, x_0) + I_i(x(t_i; t_0, x_0)) = (Id + I_i)(x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Ще предполагаме, че са изпълнени условията:

H2.1. Функцията $f \in C[R^+ \times D, R^n]$.

H2.2. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ задачата без импулси (2.1), (2.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \in R^+$.

H2.3. Съществува положителна константа C^f такава, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f(t, x)\| \leq C^f.$$

H2.4. Функциите $I_i \in C[D, R^n]$, $(Id + I_i): D \rightarrow D$, $i = 1, 2, \dots$.

Следната теорема е непосредствено следствие от условия H2.1 и H2.2.

Теорема 2.1. Нека са изпълнени условията H2.1 и H2.2.

Тогава за всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3)

съществува и е единствено при $t \geq t_0$.

Заедно с основната задача разглеждаме и смутената задача:

$$(2.4) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t_{i-1}^* < t \leq t_i^* = t_{i-1}^* + d_i^*;$$

$$(2.5) \quad x(t_i^* + 0) = x(t_i^*) + I_i(x(t_i^*)), \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$(2.6) \quad x(t_0^*) = x_0^*,$$

където:

- константите $d_i^* > 0$ са разликите между последователните импулсни моменти на последната начална задача, т.е. $d_i^* = t_i^* - t_{i-1}^*$, $i = 1, 2, \dots$;
- началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$.

Решението на смутената задача означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$, а съответните импулсни моменти с $t_1^*, t_2^*, \dots$.

Нека константите $T_1, T_2, T_1^*, T_2^* \in R^+$ и $T_1 < T_2$, $T_1^* < T_2^*$. Означаваме с $\chi(T_1, T_2]$ траекторията на задачата (2.1), (2.2), (2.3), дефинирана при $T_1 < t \leq T_2$. Аналогично, с $\chi^*(T_1^*, T_2^*)$ бележим траекторията на задачата (2.4), (2.5), (2.6), заключена между времевите константи T_1^* и T_2^* . Валидни са равенствата:

$$\chi(T_1, T_2] = \begin{cases} \{x(t; t_0, x_0); T_1 < t \leq T_2\}, & T_1 < T_2; \\ \emptyset, & T_1 \geq T_2 \end{cases}$$

и

$$\chi^*(T_1^*, T_2^*) = \begin{cases} \{x^*(t; t_0^*, x_0^*); T_1^* < t \leq T_2^*\}, & T_1^* < T_2^*; \\ \emptyset, & T_1^* \geq T_2^*. \end{cases}$$

Дефиниция 2.1. Ще казваме, че решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началното условие и разликата между импулсните моменти (т.е. от параметъра d), ако

$$\begin{aligned} & (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D) (\forall \varepsilon > 0) (\forall T > t_0, T \neq t_i, i=1, 2, \dots) \\ & (\exists \delta = \delta(t_0, x_0, d, \varepsilon, T) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & (\forall d_i^* > 0, |d_i^* - d| < \delta, i=1, 2, \dots) \\ & \Rightarrow \rho_H(\chi^*[t_0^*, T], \chi[t_0, T]) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следната теорема е основна в главата.

Теорема 2.3. Нека са изпълнени условията H2.1–H2.4.

Тогава решението на задачата (2.1), (2.2), (2.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началната точка и разликата между импулсните моменти.

В общия случай, лечението от редица болестни състояния се осъществява чрез поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Поддържането на терапевтичната плазмена концентрация може да се осъществи по два основни начина:

- чрез непрекъснато подаване на лекарството;
- чрез прекъснато (импулсно) подаване на лекарството през определени времеви интервали.

От фармакокинетична гледна точка непрекъснатото подаване на лекарствата е за предпочитане. За съжаление, този начин на лечение е затруднен при практическото му реализиране. По-точно, в общия случай е невъзможно предписаното лекарство да се подава непрекъснато в продължение на целия период на лечение на пациента (този период може да е с продължителност от няколко седмици или месеци). Поради тази причина поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството е по-често срещано. Естествено е да се предполага, че обемът на дискретно подаденото лекарствено средство е ограничен отдолу, т.е. съществува минимално количество от лекарството, което може да се приеме еднократно. При този тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра: размер на еднократната доза на лекарството D_i и дължина на дозовия интервал T_{i+1} , $i=1, 2, \dots$. По-точно D_i е дозата при i -тото подаване на лекарството, а T_{i+1} е времето между моментите на i -тото и $(i+1)$ -то подаване на лекарството, $i=1, 2, \dots$. В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, то започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани терапевтични граници на концентрацията на лекарството. От своя страна, терапевтичните граници обграждат така наречения терапевтичен прозорец. Фармакокинетичният модел на

терапевтичното лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, която гарантира поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец.

Въвеждаме следните ограничения и означения:

1. Организмът се представя чрез един компартимент с обем V_d , в който лекарственото средство се разпределя. Възможно е концентрацията на лекарството да е различна в различните части на организма. За удобство ще предполагаме, че е имаме постоянно съотношение между нивата на лекарството във всяка част на организма в периода на лечението. Това означава, че всяка промяна в плазмената концентрация рефлектира в строго определена съответна количествена промяна в тъканните концентрации.

2. Началният момент на лечението означаваме с t_0 ;

3. Времетраенето от началния момент на лечение t_0 до първия момент t_1 , в който се внася лекарствено средство с обем D_1 , означаваме с T_1 , т.е. изпълнено е равенството

$$t_1 = t_0 + T_1;$$

4. Дозата D_i от лекарственото средство се внася директно в компартимента в момента

$$t_i = t_{i-1} + T_i = t_0 + \sum_{j=1,2,\dots,i} T_j, \quad i=1, 2, \dots;$$

5. Елиминирането на лекарството протича със скорост, която е пропорционална на моментното му количество в организма, т.е. разглежда се като процес от първи порядък, характеризиращ се със скоростна константа K . Последната константа е сума от константата на метаболизиране K_m и константата на екстракция на непромененото лекарство K_e . Изпълнено е $K = K_m + K_e$;

6. Означаваме с $A(t)$ количеството лекарствено средство в организма в момента $t \geq t_0$. В общия случай за произволно зададен момент, количеството на това вещество, което се намира в цялото тяло на пациента, не може да бъде определено експериментално. В действителност се определя концентрацията на лекарственото средство в някои от биологичните течности (най-често в кръвта). За математическото моделиране на процеса на лечението е удобно да се въведе обемът, в който се разпределя лекарственото средство. Тази величина, наречена обем на разпределение, означаваме с V_d и е дефинирана така, че е изпълнено равенството

$$C(t) = \frac{A(t)}{V_d}, \quad t \geq t_0,$$

където $C(t)$ е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта или по-общо в плазмата. Ще отбележим, че обемът на разпределение няма физиологичен смисъл. Можем да считаме, че това е фиктивен обем, в който ако лекарството в количество $A(t)$ се разпредели равномерно, то ще е в концентрация $C(t)$. Отново ще отбележим, че горната концентрация е измерена относно плазмата. В действителност, част от лекарството се свързва с плазмените и тъканните протеини, поради което неговото разпределение не е равномерно. Поради тази причина е възможно, обемът на разпределение да е различен от обема на телесните течности.

7. В началния момент t_0 ще предполагаме, че лекарствената концентрация е C_0 . В някои случаи се приема, че $C_0 = 0$.

Математическият модел на идеализирания по-горе процес се описва в [153] (виж също [223]) с помощта на следната начална задача за импулсно диференциално уравнение:

$$(2.28) \quad \frac{dC}{dt} = -KC, \quad t \neq t_i,$$

$$(2.29) \quad C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d}, \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(2.30) \quad C(t_0) = C_0.$$

Решението на горната начална задача се получава сравнително тривиално:

1. При $t_0 \leq t \leq t_1$ е изпълнено

$$C(t) = C_0 \exp(-K(t - t_0));$$

2. При $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 2, 3, \dots$, е валидно равенството

$$C(t) = \frac{\exp(-Kt)}{V_d} \sum_{j=0,1,\dots,i} D_j \exp(Kt_j) = C_i \exp(-Kt),$$

където

$$C_i = \frac{1}{V_d} \sum_{j=0,1,\dots,i} D_j \exp(Kt_j) \quad \text{и} \quad D_0 = C_0 V_d.$$

Изборът на импулсните моменти $t_1, t_2, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots$), т.е. моментите, в които се приема лекарственото средство, и неговите дози $D_1, D_2, \dots$ ($D_1 > 0, D_2 > 0, \dots$), както казахме по-горе, зависят от предписанието на лекуващия лекар. Тук ще дадем някои съображения свързани с тези елементи на лечебната схема.

1. Нека терапевтичният прозорец ограничава концентрацията на лекарственото средство в следните граници:

- долна граница $C^{\min}$, $C^{\min} = \text{const} > 0$;
- горна граница $C^{\max}$, $C^{\max} = \text{const} > C^{\min}$.

Следователно

$$(\forall t \geq t_0) \Rightarrow C^{\min} \leq C(t) \leq C^{\max}.$$

2. Нека импулсният прием на лекарство се осъществява в моментите, когато концентрацията достигне долната граница на терапевтичния прозорец, т.е. изпълнени са равенствата

$$C(t_i) = C^{\min}, \quad i = 1, 2, \dots$$

3. Лекарствените дози са такива, че след прием на лекарственото средство концентрацията достига горната граница на терапевтичния прозорец. С други думи имаме

$$\frac{D_i}{V_d} = C^{\max} - C^{\min}, \quad i = 1, 2, \dots$$

4. В началния момент на лечението в компартиента е внесено такова количество лекарствено средство, че началната концентрация е равна на горната граница на терапевтичния прозорец, т.е. предполагаме, че

$$C_0 = C^{\max}.$$

Тогава изходната начална задача (2.28), (2.29), (2.30) можем да редактираме както следва

$$(2.31) \quad \frac{dC}{dt} = -KC, \quad t_{i-1} < t \leq t_i = t_{i-1} + d;$$

$$(2.32) \quad C(t_i + 0) = C(t_i) + C^{\max} - C^{\min}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$(2.33) \quad C(t_0) = C^{\max}.$$

За решението на задачата (2.31), (2.32), (2.33) е валидна Теорема 2.3. Следователно, решението на тази задача е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началното условие и разликата между импулсните моменти. Тази разлика в разглежданата задача е

$$d = \frac{1}{K} \ln \frac{C^{\max}}{C^{\min}}.$$

Този факт има следното тълкуване:

Концентрациите на лекарствените средства в кръвта на един и същи пациент при две различни схеми на лечение са приблизително равни (в смисъл, че Хаусдорфовото разстояние между тях може да се счита за произволно малко), ако са изпълнени следните условия:

- Манипулационният период (периодът през който се приемат лекарствените средства) е ограничен и е един и същи за двете схеми на лечение;
- Концентрациите на лекарствата в началния момент на лечението при двете схеми на лечение се различават несъществено;
- Началните моменти на лечението и при двете схеми приблизително съвпадат;
- Дозировките при всеки дискретен лекарствен прием и при двете схеми на лечение са равни;
- Дозовите интервали (интервалите между два последователни момента на лекарствен прием) удовлетворяват следните изисквания:
 - ограничени са отдолу,
 - в едната от двете схеми (наречена основна схема) дозовите интервали са равни помежду си, т.е. приемът на лекарствени средства е периодичен,
 - съответните дозови интервали между двете схеми са приблизително равни, което означава, че моментите на прием на лекарството в двете схеми на лечение приблизително съвпадат.

Глава 3. ОРБИТАЛНА ХАУСДОРФОВА ЗАВИСИМОСТ НА РЕШЕНИЯТА НА КЛАС НЕАВТОНОМНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРОМЕНЛИВИ СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ

Основен обект на изследване в тази глава са нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с променливи структура и импулси. Моментите на смяната на дясната страна на системата и моментите, в които се осъществяват импулсните въздействия съвпадат и не са предварително фиксирани. Тези моменти се наричат превключващи. По-точно, структурните изменения и импулсите се осъществяват, когато траекторията на съответната начална задача пресича така нареченото „превключващо множество“, разположено във фазовото пространство на системата. Тук ще предполагаме, че превключващото множество се състои от изброимо много гладки повърхнини. Тези превключващи множества се променят заедно със смяната на структурата на системата, която изследваме.

В първия параграф на главата за този тип системи е въведено понятието орбитална Хаусдорфова зависимост по отношение на началната точка и импулсните въздействия. Намерени са достатъчни условия, при които решенията притежават това свойство.

По-подробно, Хаусдорфова зависимост по отношение на началната точка и импулсните въздействия означава, че сравнително „малки“ смущения на началната точка и импулсите водят до „малки“ различия между траекториите на основната начална задача и съответната ѝ смутена задача. В тази глава траекториите са дефинирани в предварително фиксиран и ограничен времеви интервал. Разстоянието между траекториите е в термините на Хаусдорфова метрика. Ще обърнем още веднъж внимание, че избраната метрика е изключително удобна при определяне на разстояния между прекъснати функции, особено

ако точките на прекъсване на двете функции са различни във времето. Точно такива функции са решенията на системите уравнения от разглеждания тип.

Във втория параграф на главата, получените теоретични резултати, са приложени върху обобщен математически модел на Лотка-Волтера, описващ еволюционната динамика на съобщество от тип хищник-жертва. Новото тук е, че съобществото последователно сменя закона на развитие (скоростта на изменение на популацията) и е подложено на кратковременни външни въздействия. Изследванията в тази глава обобщават резултатите в монографията [155].

Първите изследвания, посветени на импулсни уравнения с използване на Хаусдорфова метрика, са на В. Ahmad и S. Sivasundaram [69] и [70]. На споменатия по-горе импулсен модел на Лотка-Волтера са посветени редица изследвания, от които тук ще посочим следните: [76], [84], [144], [163], [182], [189], [193], [194], [195], [196], [209], [210], [212], [213], [215], [219], [220], [221], [230], [231], [243], [248], [269], [272], [274], [281], [282] и [287].

Основен обект на изследване е следната начална задача:

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0;$$

$$(3.2) \quad x(t+0) = x(t) + I_i(x(t)), \quad \varphi_i(x(t)) = 0;$$

$$(3.3) \quad x(t_0) = x_0,$$

където:

- десните страни на системата $f_i: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- превключващите функции $\varphi_i: D \rightarrow R$;
- D е област от R^n ;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$.

Множеството от точки $x \in D$, които удовлетворяват равенството $\varphi_i(x) = 0$, се нарича i -то превключващо множество (в случая това е хиперповърхнина, разположена в D). Това множество ще бележим с Φ_i , т.е.

$$\Phi_i = \{x \in D; \varphi_i(x) = 0\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Функциите $I_i: \Phi_i \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots$, се наричат импулсни функции. Ще предполагаме, че е изпълнено $(Id + I_i): \Phi_i \rightarrow D$, където Id е идентитетът в R^n . Моментите, в които траекторията на горната задача последователно среща превключващите хиперповърхнини, означаваме с $t_1, t_2, \dots$, $0 < t_1 < t_2 < \dots$. Решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3) ще означаваме с $x(t; t_0, x_0)$.

Заедно с основната задачата (3.1), (3.2), (3.3) разглеждаме и съответната й смутена задача

$$(3.4) \quad \frac{dx^*}{dt} = f_i(t, x^*), \quad \varphi_i(x^*(t)) \neq 0,$$

$$(3.5) \quad x^*(t+0) = x^*(t) + I_i^*(x^*(t)), \quad \varphi_i(x^*(t)) = 0,$$

$$(3.6) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*,$$

където:

- импулсните функции $I_i^* : \Phi_i \rightarrow R^n$ и $(Id + I_i^*) : \Phi_i \rightarrow D$;
- началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$.

Както се вижда, разликата между задачите (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5), (3.6) е в началната точка и импулсните функции. Решението на смутената задача (3.4), (3.5), (3.6) ще означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$, а моментите, в които траекторията на тази задача среща последователно превключващите хиперповърхнини $\Phi_i, i = 1, 2, \dots$, ще означаваме съответно с $t_1^*, t_2^*, \dots, 0 < t_1^* < t_2^* < \dots$.

Дефиниция 3.1. Ще казваме, че решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началната точка (t_0, x_0) и импулсните функции $I_1, I_2, \dots$, ако:

$$\begin{aligned} & (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D) (\forall I_i : \Phi_i \rightarrow R^n, i = 1, 2, \dots) \\ & (\forall \varepsilon > 0) (\forall T > t_0, T \neq t_i, i = 1, 2, \dots) \\ & (\exists \delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon, T, I_1, I_2, \dots) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & (\forall I_i^* : \Phi_i \rightarrow R^n, \|I_i^*(x) - I_i(x)\| < \delta, x \in \Phi, i = 1, 2, \dots) \\ & \Rightarrow \rho_H(\chi^*[t_0^*, T], \chi[t_0, T]) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Основната цел на изследванията в настоящия параграф е намирането на достатъчни условия за съществуване на орбитална Хаусдорфова зависимост относно началната точка и импулсните функции на решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3).

По-нататък ще използваме следните условия, които са валидни за всяко $i = 1, 2, \dots$:

НЗ.1. Функциите $f_i \in C[R^+ \times D, R^n]$ и $f_i \in Lip_x[R^+ \times D, R^n]$.

НЗ.2. Съществуват положителни константи C^{f_i} такива, че:

- Изпълнени са

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C^{f_i};$$

- Редът $\sum_{i=1,2,\dots} \frac{1}{C^{f_i}}$ е разходящ.

НЗ.3. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ задачата без импулси (3.1), (3.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \in R^+$.

НЗ.4. За всяко множество на превключване $\Phi_i = \{x \in D; \varphi_i(x) = 0\}$ е валидно включването

$$\bar{\Phi}_i \setminus \Phi_i \subset \bar{D} \setminus D.$$

НЗ.5. Функциите $\varphi_i \in C^1[D, R]$ и

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times \Phi_i) \Rightarrow \|\text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x)\| > 0.$$

НЗ.6. Функциите $I_i \in C[\Phi_i, R^n]$ и $(Id + I_i): \Phi_i \rightarrow D$.

НЗ.7. Съществува положителна константа Δ такава, че са изпълнени неравенствата

$$\rho_E(\Phi_{i+1}, (Id + I_i)(\Phi_i)) \geq \Delta.$$

В следващата теорема са посочени достатъчни условия за отсъствие на явлението кондензация на моментите на превключване. С други думи, намерени са условия, при които $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Теорема 3.1. Нека:

1. Изпълнени са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.3.
2. Траекторията $\chi[t_0, \infty)$ на задачата (3.1), (3.2), (3.3) среща безбройно много превключващи множества $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ съответно в превключващите моменти $t_1, t_2, \dots$.

Тогава $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

Основният резултат в главата се съдържа в следната теорема.

Теорема 3.3. Нека са изпълнени условията НЗ.1 - НЗ.7.

Тогава решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началната точка (t_0, x_0) и импулсните функции $I_1, I_2, \dots$.

Класическият математически модел на Лотка-Волтера (без импулсни смущения и с фиксирана структура) сравнително адекватно описва динамиката на изолирано съобщество от тип жертва-хищник. При този модел основното изискване е да няма дискретни външни въздействия. В този параграф се изучава тъкмо обратното: съобщество от тип жертва-хищник, което е подложено на кратковременни външни въздействия (обикновено дължащи се на намесата на човека). Тези въздействия се изразяват в отнемането или добавянето на определени количества биомаса, които принадлежат както на жертвата, така и на хищника. Освен това, непосредствено след импулсните смущения се извършва и смяна на дясната страна на системата. Обикновено тази промяна се свежда до изменение на основни параметри на моделната система.

Естествено е да се предполагат следните ограничения, които се отнасят за външните въздействия:

- Времетраенето на всяко от външните въздействия е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса, поради което може да се приеме, че въздействията се осъществяват „мигновено“ под формата на импулси;
- Въздействията се извършват в моментите, в които биомасите на жертвата и хищника достигнат определени количествени характеристики. Това изискване математически може да се опише с импулсни отнемания или добавяния на биомаса, които се осъществяват при срещата на траекторията на системата с предварително фиксирани множества, наречени „превключващи множества“. Тези множества са разположени във фазовото пространство. Като правило, превключващите множества са гладки криви, принадлежащи на пространството на допустимите състояния на системата;
- „Големините“ на импулсните въздействия (обемът на отнеманията или добавянията на биомаса) са ограничени отдолу. Основната причина за това предположение е, че

практически е невъзможно да се добавя или отнема биомаса в количества, които са под определен минимум;

- „Големините” на импулсните въздействия са ограничени отгоре. Това предположение има следното принципно обяснение:

- Ако въздействието е от типа отнемане на биомаса (това е най-често срещаният случай, който е обект на изследване и в настоящия параграф), то е невъзможно отнетото количество да е повече от наличното в момента на импулсното въздействие;

- Ако въздействието е от типа добавяне на биомаса (това е рядко срещан случай), то от финансова гледна точка не е целесъобразно добавеният обем на биомасата да е над определен „икономически оправдан” максимум;

- Много често, по обективни причини, е невъзможно жертвата и хищникът да се сепарират отделно. В тези случаи, отнетата биомаса от съобществото представлява смес от биомасите на жертвата и хищника. Нещо повече, отнетите обеми от двата вида са пропорционални на количествата на биомасите им в момента на отнемането. По-точно, ако количествата на биомасите на жертвата и на хищника в момента на импулсните въздействия са съответно m и M , то количествата, които се отнемат са съответно $\Delta_i \cdot m$ и $\Delta_i \cdot M$, като индексът i показва номера на последователното импулсно въздействие.

Функциите $\Delta_i = \Delta_i(m, M)$, $i = 1, 2, \dots$, са дефинирани за всяка точка от съответното превключващо множество и удовлетворяват неравенствата: $0 \leq \Delta_i(m, M) \leq 1$. Често срещан случай е $\Delta_i = \text{const}$.

- Ще отбележим, че при импулсната интервенция върху биомасата на популацията се променят и някои специфични параметри на нейното развитие. Такива например са коефициентите, отразяващи вътрешновидовата борба или на растежа на отделната популация. Тези изменения в крайна сметка са свързани с промяна на скоростта на растежа на популациите, т.е. свързани са с изменение на десните страни на моделната система.

Един възможен обобщен математически модел на Лотка-Волтера с променливи структура и импулси със зададено начално състояние и който отговаря на горните изисквания, има математическа форма:

$$(3.22) \quad \frac{dm}{dt} = \dot{m} = f_{m_i}(m, M) = \mu_{m_i} m (r_m - q_m M), \quad \varphi_i(m(t), M(t)) \neq 0;$$

$$(3.23) \quad \frac{dM}{dt} = \dot{M} = f_{M_i}(m, M) = -\mu_{M_i} M (r_M - q_M m), \quad \varphi_i(m(t), M(t)) \neq 0;$$

$$(3.24) \quad m(t+0) = (1 - \Delta_i(m(t), M(t)))m(t), \quad \varphi_i(m(t), M(t)) = 0;$$

$$(3.25) \quad M(t+0) = (1 - \Delta_i(m(t), M(t)))M(t), \quad \varphi_i(m(t), M(t)) = 0;$$

$$(3.26) \quad m(0) = m_0; \quad M(0) = M_0,$$

където:

- Размерността на системата е $n = 2$;
- $m = m(t) > 0$ и $M = M(t) > 0$ са съответно количествата на биомасите на жертвата и хищника в момента $t \geq 0$;

- Константите $r_m > 0$ и $r_M > 0$ са специфични коефициенти на растежа, които са съответни на първия вид (жертвата) и втория вид (хищника);
- Константите $q_m > 0$ и $q_M > 0$ са коефициентите, отразяващи вътрешновидовата борба. Те са съответни за жертвата и хищника;
- Превключващите моменти $t_1, t_2, \dots, 0 < t_1 < t_2 < \dots$, удовлетворяват равенствата

$$\varphi_i(m(t_i), M(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Предполагаме, че функциите

$$\Delta_i(m, M) = \Delta_i(m) = 1 - p_i \frac{m_{00}}{m}, \quad (m, M) \in \Phi_i,$$

където $p_i = \text{const}$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots$;

- Стойностите:

$$\Delta_i \cdot m = \Delta_i(m(t_i), M(t_i)) \cdot m(t_i) \text{ и } \Delta_i \cdot M = \Delta_i(m(t_i), M(t_i)) \cdot M(t_i)$$

са количествата биомаса, съответно от жертвата и от хищника, които се отнемат под формата на импулси съответно в превключващите моменти t_i , $i = 1, 2, \dots$;

- Положителните константи μ_{mi} и μ_{Mi} регулират съответно скоростите на нарастване на биомасите на жертвата и хищника;
- Константите $m_0 > 0$ и $M_0 > 0$ са количествата на биомасите на двата вида в началния момент $t = t_0 = 0$;

Обобщеният модел на Лотка-Волтера с променливи структура и импулси (при наличието на няколко естествени предположения) удовлетворява условията на Теорема 3.3. Следователно, решението на задачата (3.22) - (3.26) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началната точка (m_0, M_0) и импулсните функции I_i , $i = 1, 2, \dots$.

Възможно е следното тълкуване на получените резултати. Нека:

- Разглеждаме динамиката на две еднотипни съобщества от тип „хищник-жертва“, подложени на дискретни външни въздействия и смяна на закона на развитие непосредствено след въздействията. Разликата между съобществата е в началните им състояния (количествата на биомасите в началния момент) и големините на последователните импулсни отнемания. Едното съобщество приемаме за „оригинално“, а другото за „смутено“;
- Изходните количества на биомасите на жертвата и хищника в смутеното съобщество не се различават съществено съответно от началните количества на биомасите на жертвата и хищника в оригиналното съобщество;
- Импулсните отнемания в смутеното съобщество и оригиналното съобщество са „приблизително равни“.

Тогава за краен интервал от време (независимо колко голям е той) изменението на биомасите в съобществата на двете биосистеми се развива „приблизително по един и същи закон“ („траектория“). По-точно казано, Хаусдорфовото разстояние между тези две прекъснати траектории клони към 0, ако разликите между съответните начални условия и импулсни функции клони към 0.

Глава 4. ОРБИТАЛНА ХАУСДОРФОВА УСТОЙЧИВОСТ НА РЕШЕНИЯТА НА КЛАС НЕАВТОНОМНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРОМЕНЛИВИ СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ

През последните години редица изследвания са посветени на качествената теория на диференциалните уравнения без импулси, при които се използва Хаусдорфова метрика: [71], [72], [155] и [156]. Тук тази метрика се използва при изучаването на неавтономни системи диференциални уравнения с променливи структура и импулси.

В тази последна глава на дисертацията основен обект на изследване (както и в предходната трета глава) е клас неавтономни нелинейни системи диференциални уравнения с променливи структура и импулси. Ще припомним, че смяната на десните страни на системата и импулсните въздействия се реализират в моментите, в които траекторията на съответната начална задача среща поредното „превключващо множество“. Това множество е разположено във фазовото пространство на системата. Изследванията в настоящата глава са проведени в частния случай, за който:

- Множествата на десните страни на системата, превключващите множества и импулсните функции се състоят от краен брой елементи, т.е.

$$\{f_i(t, x); i = 1, 2, \dots\} = \{\tilde{f}_j(t, x); j = 1, 2, \dots, k\},$$

$$\{\Phi_i; i = 1, 2, \dots\} = \{\tilde{\Phi}_j; j = 1, 2, \dots, k\},$$

$$\{I_i(x); i = 1, 2, \dots\} = \{\tilde{I}_j(x); j = 1, 2, \dots, k\};$$

- Превключващите множества съвпадат с части от предварително зададени хиперравнини.

За описаната по-горе задача, тук за първи път са въведени термините:

- орбитална гравитация;
- орбитална Хаусдорфова устойчивост относно началното условие.

Споменатите термини е възможно да се отнесат и за системи диференциални уравнения без импулси и с постоянна структура. Така например, ще казваме, че една система диференциални уравнения (без импулси и с постоянна структура) е орбитално гравитираща с константа κ , ако Хаусдорфовото разстояние между две нейни произволни траектории е κ пъти по-малко от Евклидовото разстояние между тях.

Нека дясната страна на разглежданата система (с променливи структура и импулси) последователно съвпада с функциите $f_1, f_2, \dots$. Нека решенията на всяка една от съответните системи без импулси

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

са орбитално гравитиращи. При това основно предположение, в първия параграф на главата са намерени достатъчни условия, при които решенията на основната (изучаваната) задача с променливи структура и импулси са орбитално Хаусдорфово устойчиви относно началното условие.

Във втория параграф на глава 4 е разгледана моделна система, описваща отклонението от равновесното положение и скоростта на движение на материална точка. Специфични особености на разглеждания модел и в частност на материалната точка са:

- материалната точка е с ненулева маса;
- окачена е на идеално пъргава пружина;
- разположена е в изолирана среда;
- подложена е на външни дискретни импулсни въздействия в моментите, в които преминава през горното си равновесно положение;

- в тези моменти материалната точка се премества скокообразно;
- в тези моменти нейната скорост се анулира;
- в тези моменти се сменя честотата на движението на материалната точка.

Оказва се, че математическият модел представлява система обикновени диференциални уравнения с променливи структура и импулси. Намерени са естествени ограничения на параметрите на съответния математически модел, при които решението е орбитално Хаусдорфово устойчиво.

Най-напред ще дефинираме понятието орбитално гравитираща система диференциални уравнения.

Разглеждаме началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

където:

- функцията $f: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- множеството D е област от R^n ;
- точката $(t_0, x_0) \in R^n \times D$.

Решението на горната задача означаваме с $X(t; t_0, x_0)$. Съответната траектория на това решение бележим с $\Gamma[t_0, \infty)$, т.е. $\Gamma[t_0, \infty) = \{X(t; t_0, x_0), t_0 \leq t < \infty\}$. С $X^*(t; t_0^*, x_0^*)$ и $\Gamma^*[t_0^*, \infty)$ означаваме съответно решението и траекторията на смутената задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0^*) = x_0^*,$$

където точката $(t_0^*, x_0^*) \in R^n \times D$.

Дефиниция 4.1. Ще казваме, че системата

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

е орбитално гравитираща в областта D с константа $\kappa \geq 1$, ако:

$$\begin{aligned} & (\forall t_0^*, t_0 \in D)(\forall x_0^*, x_0 \in D) \\ & \Rightarrow \rho_H(\Gamma^*[t_0^*, \infty), \Gamma[t_0, \infty)) \leq \kappa \cdot \rho_E(\Gamma^*[t_0^*, \infty), \Gamma[t_0, \infty)) \\ & \Leftrightarrow \max \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X^*(t^*; t_0^*, x_0^*), X(t; t_0, x_0)), t \geq t_0 \right\}, t^* \geq t_0^* \right\}, \right. \\ & \quad \left. \sup \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X^*(t^*; t_0^*, x_0^*), X(t; t_0, x_0)), t^* \geq t_0^* \right\}, t \geq t_0 \right\} \right\} \\ & \leq \kappa \cdot \inf \left\{ \inf \left\{ \rho_E(X^*(t^*; t_0^*, x_0^*), X(t; t_0, x_0)), t \geq t_0 \right\}, t^* \geq t_0^* \right\}. \end{aligned}$$

Основен обект на изследване е следната начална задача

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \langle a_i, x(t) \rangle \neq \alpha_i;$$

$$(4.2) \quad x(t+0) = x(t) + I_i(x(t)), \quad \langle a_i, x(t) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$(4.3) \quad x(t_0) = x_0,$$

където:

- размерността $n \in \mathbb{N}$; множеството D е непразна област от R^n ;
- функциите $f_i: R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- векторите $a_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) \in R^n$, $\|a_i\| = 1$;
- константите $\alpha_i \in R$;
- функциите $I_i: \Phi_i \rightarrow R^n$, където $\Phi_i = \{x \in D; \langle a_i, x \rangle = \alpha_i\}$;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$.

Множествата Φ_i , $i = 1, 2, \dots$, се наричат превключващи множества. Ще отбележим, че в този параграф тези множества са части от хиперравнини, разположени в D . Функциите I_i , $i = 1, 2, \dots$, се наричат импулсни функции. Ще предполагаме, че са изпълнени съотношенията $(Id + I_i): \Phi_i \rightarrow D$, където (както и в предходните глави) Id е идентитетът в R^n . Моментите, в които траекторията на горната задача последователно среща превключващите множества $\Phi_1, \Phi_2, \dots$, означаваме с $t_1, t_2, \dots$. Изпълнени са неравенствата $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$.

Решението $x(t; t_0, x_0)$ на разглежданата задача е по части непрекъсната функция.

Заедно със задачата (4.1), (4.2), (4.3) разглеждаме и съответната смутена начална задача (4.1), (4.2) с начално условие

$$(4.4) \quad x(t_0^*) = x_0^*,$$

където началната точка $(t_0^*, x_0^*) \in R^+ \times D$. Решението на смутената задача (4.1), (4.2), (4.4) ще означаваме с $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$, а моментите, в които траекторията на тази задача среща превключващите множества $\Phi_1, \Phi_2, \dots$, ще означаваме съответно с $t_1^*, t_2^*, \dots$. Валидни са неравенствата $t_0^* < t_1^* < t_2^* < \dots$. Траекториите на задачите (4.1), (4.2), (4.3) и (4.1), (4.2), (4.4) ще бележим съответно както следва:

$$\gamma[t_0, \infty) = \{x(t; t_0, x_0), t_0 \leq t < \infty\} \text{ и } \gamma^*[t_0^*, \infty) = \{x^*(t; t_0^*, x_0^*), t_0^* \leq t < \infty\}.$$

Дефиниция 4.2. Ще казваме, че решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие (началната точка), ако:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0): \\ & (\forall t_0^* \in R^+, |t_0^* - t_0| < \delta) (\forall x_0^* \in D, \|x_0^* - x_0\| < \delta) \\ & \Rightarrow \rho_H(\gamma^*[t_0^*, \infty), \gamma[t_0, \infty)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Основната цел на настоящия параграф е намирането на достатъчни условия за орбитална Хаусдорфова устойчивост относно началното условие на решението на задачата (4.1), (4.2), (4.3).

Тази цел ще постигнем, като основното изискване е последователните промени на:

- структурата (дясната страна на системата) на разглежданата задача;
- импулсните функции;
- превключващите множества

да са ограничени в рамките на краен брой възможности. Ще считаме, че допустимите варианти са k на брой.

По-точно, ще предполагаме, че е валидно е следното условие:

H4.0. *Съществуват:*

- десни страни на системата $\widetilde{f}_j : R^+ \times D \rightarrow R^n$;
- вектори $\widetilde{a}_j \in R^n$, $\|\widetilde{a}_j\| = 1$;
- константи $\widetilde{\alpha}_j \in R$;
- превключващи множества $\widetilde{\Phi}_j = \{x \in D; \langle \widetilde{a}_j, x \rangle = \widetilde{\alpha}_j\}$
- импулсни функции $\widetilde{I}_j : \widetilde{\Phi}_j \rightarrow R^n$, $j = 1, 2, \dots, k$,

такива, че $(\forall i = 1, 2, \dots)(\exists j_i \in \{1, 2, \dots, k\})$:

$$f_i(t, x) = \widetilde{f}_{j_i}(t, x), \quad (t, x) \in R^+ \times D; \quad a_i = \widetilde{a}_{j_i}; \quad \alpha_i = \widetilde{\alpha}_{j_i}; \quad \Phi_i = \widetilde{\Phi}_{j_i}; \quad I_i(x) = \widetilde{I}_{j_i}(x), \quad x \in \widetilde{\Phi}_{j_i}.$$

По-нататък ще предполагаме, че за всяко $j = 1, 2, \dots, k$ са изпълнени следните условия:

H4.1. *Функциите $\widetilde{f}_j \in C[R^+ \times D, R^n]$ и $\widetilde{f}_j \in Lip_x[R^+ \times D, R^n]$.*

H4.2. *Съществуват положителни константи C_j^1 , такива, че*

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \|\widetilde{f}_j(t, x)\| \leq C_j^1.$$

H4.3. *За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ задачите без импулси*

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{f}_j(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

притежават единствени решения, които са дефинирани при $t \geq t_0$.

H4.4. *Превключващите множества $\widetilde{\Phi}_j$ са ограничени и са валидни включенията*

$$\overline{(\widetilde{\Phi}_j)} \setminus \widetilde{\Phi}_j \subset \bar{D} \setminus D.$$

H4.5. *Съществуват константи C_j^2 , $0 < C_j^2 \leq 1$, и функция φ , $\varphi \in C[\bar{D}, R]$, $\varphi(x) > 0$*

при $x \in \overline{(\widetilde{\Phi}_j)}$, такива, че

$$(\forall (t, x) \in R^+ \times \widetilde{\Phi}_j) \Rightarrow \left| \langle \widetilde{a}_j, \widetilde{f}_j(t, x) \rangle \right| \geq C_j^2 \|\widetilde{f}_j(t, x)\| \geq \varphi(x).$$

H4.6. *Съществуват положителни константи C_j^3 , такива, че са валидни неравенствата*

$$\rho_E(\widetilde{\Phi}_i, (Id + \widetilde{I}_j)(\widetilde{\Phi}_j)) \geq C_j^3, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

H4.7. *Съществуват положителни константи C_j^4 , такива, че*

$$\left(\forall x', x'' \in \widetilde{\Phi}_j \right) \Rightarrow \rho_E \left(x' + \widetilde{I}_j(x'), x'' + \widetilde{I}_j(x'') \right) \leq C_j^4 \cdot \rho_E(x', x'').$$

Теорема 4.1. Нека:

1. Изпълнени са условията Н4.0, Н4.1, Н4.3, Н4.4 при $j = j_1$.
2. Системата

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \widetilde{f}_{j_1}(t, x)$$

е орбитално гравитираща в областта D със съответна константа $\kappa_{j_1} \geq 1$.

3. Траекторията $\gamma[t_0, \infty)$ не пресича превключващото множество $\Phi_1 = \widetilde{\Phi}_{j_1}$.

Тогава за всяка начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$, $x_0 \notin \Phi_1$, решението на основната задача (4.1), (4.2), (4.3) (в случая решението на основната задача съвпада с решението на задачата (4.1), (4.3) при $i=1$) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие.

Основният резултат в дисертационния труд е следната теорема.

Теорема 4.2. Нека:

1. Изпълнени са условията Н4.0 - Н4.7.
2. Системите

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{f}_j(t, x)$$

са орбитално гравитиращи в областта D със съответни константи $\kappa_j \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

3. Траекторията $\gamma[t_0, \infty)$ пресича превключващото множество $\Phi_1 = \widetilde{\Phi}_{j_1}$.
4. Валидни са неравенствата

$$C_j^4 < \frac{C_j^2}{\kappa_j(1 + C_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Тогава за всяка начална точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$, $x_0 \notin \Phi_1$, решението на основната задача (4.1), (4.2), (4.3) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие.

Да разгледаме уравнението, описващо вертикалните трептения на материална точка с ненулева маса, окачена на идеално пъргава пружина в изолирана среда, т.е. без триене и при отсъствие на постоянно действащи външни сили. Да означим с $y = y(t)$ отклонението на точката от равновесното и положение $y = 0$. Изпълнено е

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \mu^2 y = 0,$$

където μ е параметър, отчитащ масата на материалната точка и качествата на пружината. Въвеждаме функциите:

$$x^1(t) = y(t) = C \cos(\mu t + \nu) \quad \text{и} \quad x^2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -C\mu \sin(\mu t + \nu),$$

с които се изразяват съответно преместването на материалната точка и нейната скорост и които са решение на задачата

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

където $t_0 = 0$ и

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} C \cos \nu \\ -C\mu \sin \nu \end{pmatrix}.$$

Системата

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

е орбитално гравитираща с константа $\kappa = 1/\mu$.

Да предположим, че материалната точка във всеки момент, в който преминава през равновесното си състояние $x^1 = 0$, движейки се “отдолу нагоре” – това означава $x^2 > 0$, е подложена на външни въздействия. Нека последователните моменти на пресичане на равновесното положение на осцилатора означим с $t_1, t_2, \dots$. Ясно е, че са валидни равенствата

$$x^1(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Въздействията в момента $t = t_i$ се състоят в следното:

- Моментално преместване на материалната точка от положение $x^1(t_i)$ в положение $x^1(t_i + 0) = x^1(t_i) + I_i(x^1(t_i), x^2(t_i))$;
- Анулиране на скоростта на движение на материалната точка, т.е. моментално преместване на скоростта от положение $x^1(t_i)$ в положение $x^2(t_i + 0) = 0$;
- Смяна на честотата на движение на материалната точка. Например, от текуща честота μ_i до момента t_i в нова честота μ_{i+1} след този момент. Последната смяна рефлектира върху промяна на дясната страна на системата.

Отместването от равновесното положение и скоростта на материалната точка се описват с помощта на началната задача за диференциални уравнения с променливи структура и импулси.

$$(4.18) \quad \frac{dx}{dt} = A_i x, \quad \langle a, x(t) \rangle \neq 0, \quad x_2(t) > 0;$$

$$(4.19) \quad x(t+0) = x(t) + I_i(x(t)), \quad \langle a, x(t) \rangle = 0, \quad x_2(t) > 0;$$

$$(4.20) \quad x(0) = x_0,$$

Намерени са ограничения, при които е в сила твърдението на Теорема 4.2.

Предлагаме следното тълкуване на резултатите в параграфа. Да разгледаме решението на моделна начална задача, описваща вертикалните трептения (отклонения от равновесно положение и скорости на движение) на материална точка, която е:

- с ненулева маса;
- окачена на идеално пъргава пружина;

- разположена в изолирана среда;
 - подложена на външни дискретни импулсни въздействия в моментите $t_1, t_2, \dots$, в които преминава през горното си равновесно положение;
 - в тези моменти материалната точка се премества скокообразно;
 - в моментите $t_1, t_2, \dots$ скоростта се анулира;
 - в тези моменти се сменя честотата на движение на материалната точка,
- В параграфа са посочени достатъчни условия, които гарантират, че разглежданото решение е орбитално Хаусдорфово устойчиво.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, Автоматика и телемеханика, (1961), Том 22, № 7, 817-830.
2. Андреев А., Попов В., Апроксимиране на функции относительно една Δ -метрика от хаусдорфски тип, Годишник на Софийския университет "Климент Охридски", Математически факултет, Том 64, (1971), 127-142.
3. Андреев А., Числен метод за построение на полинома на най-добро Хаусдорфово приближение, Доклады на БАН, Том 29, (1976), 163-166.
4. Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).
5. Ахиезер Н., Лекции по теории аппроксимации, Москва, (1965).
6. Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).
7. Баутин Н., Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, (1963), Том 2, 29-54.
8. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях, Научная думка, Москва, (1988).
9. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, Укр. Математический журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
10. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсным воздействием, Дифференциальные уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
11. Боянов Б., Върху полиномите на най-добро приближение относительно хаусдорфово разстояние, Годишник на Софийския университет "Климент Охридски", Математически факултет, Том 64, (1971), 161-170.
12. Боянов Т., О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфова типа, Доклады БАН, Том 23, (1970), 635-638.
13. Боянов Т., Попов В., Върху напречниците на пространството от непрекъснати функции с метрика от хаусдорфов тип, Годишник на Софийския университет, Математически факултет, Том 63, (1970), 167-185.
14. Веселинов В., Обратные теоремы для хаусдорфова приближения функций линейными операторами, Доклады БАН, Том 29, (1976), 159-162.
15. Гасанов Г., О порядке сходимости интерполяционных процессов Эрмита-Фейера в хаусдорфовой метрике, Известия АН АзССР, Кн 3, (1970), 3-7.
16. Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействием, Докл. АН Укр. ССР, (1982), Сер. А, Том 10, 11-14.
17. Гусеинов А., Гасанов Г., Об одной оценке погрешности приближенных решений линейного интегрального уравнения, Доклады АН СССР, Том 211, (1973), 1270-1272.
18. Долженко Е., Севастьянов Е., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике, Доклады АН СССР, Том 226, (1976), 768-770.
19. Долженко Е., Севастьянов Е., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций, Математический сборник, Том 101, (1976), 508-541.
20. Завалишин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
21. Завалишин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).
22. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, Дифференциальные уравнения, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
23. Калитин Б., О колебаниях маятника с ударным импульсом, часть 2, Дифференциальные уравнения, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
24. Калитин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, Дифференциальные уравнения, (1971), Том 7, № 3, 540-542.

25. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Весті НАН Беларусі*, (2003), Том 2, 59-61.
26. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, *Дифференциальные уравнения*, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
27. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., *Выброударные системы*, Наука, Москва, (1973).
28. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, *Дифференциальные уравнения*, (1974), Том 10, № 7, 1264-1271.
29. Колмогоров А., О сходимости А. Б. Скорохода, *Теория вероятностей и ее применения*, Том 1, (1956), 239-247.
30. Крылов Н., Боголюбов Н., *Введение в нелинейную механику*, Изд. УССР, Киев, (1937).
31. Марков С., Одностроннее приближение функций относительно хаусдорфова расстояния, *Конструктивная теория функций*, София, (1972), 69-75.
32. Мартынюк В., О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике, *Украинский математический журнал*, Том 28, (1976), 87-91.
33. Мартынюк В., О приближении функции В. А. Стеклова в хаусдорфовой метрике, *Математические заметки*, Кн. 5, (1969), 21-30.
34. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, *Дифференциальные уравнения*, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
35. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, *Дифференциальные уравнения*, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
36. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, *Сиб. Математический журнал*, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
37. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, *Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
38. Панов А., Вычисление $\mathcal{E}$ -энтропии пространства непрерывных функций с хаусдорфовой метрикой, *Математические заметки*, Том 21, (1977), 39-50.
39. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, *Институт математики НАН Украины*, Киев, (2007).
40. Петрушев П., Ташев С., Некоторые обратные теоремы в метрике Хаусдорфа, *Доклады БАН*, Том 29, (1976), 1721-1724.
41. Петрушев П., Христов В., О приближении полиномами Мюнца в метрике Хаусдорфа, *Доклады БАН*, Том 29, (1976), 955-958.
42. Петрушев П., Христов В., Сходимость ряда Фурье в метрике Хаусдорфа, *Плиска Български математически студии*, Кн. 1, (1977), 21-36.
43. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, *Кибернетика и системный анализ*, (2002), Том 5, 71-81.
44. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, *Укр. Математический журнал*, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
45. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, *Укр. Математический журнал*, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
46. Попов В., Троянски С., Об аппроксимации абстрактных функций в метрике Хаусдорфа, *Mathematica Balkanica*, Vol. 1, (1971), 190-194.
47. Попов Е., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, Москва, (1964).
48. Прохоров Ю., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей и ее применения, *Теория вероятностей и ее применения*, Том 1, (1956), 177-238.
49. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, *Дифференциальные уравнения*, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
50. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Дифференциальные уравнения*, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
51. Самойленко А., Перестюк Н., Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, *Вища школа*, Киев, (1987).
52. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсным воздействием, *Укр. Математический журнал*, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
53. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема "биений" в импульсных системах, *Институт математики АН УССР*, Киев, (1990).
54. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, *Укр. Математический журнал*, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
55. Сендов Б., Наилучшие хаусдорфовы приближения сплайн-функциями равномерными узлами, *Плиска Български математически студии*, Кн. 1, (1977), 79-92.

56. Сендов Б., Некоторые проблемы хаусдорфовой аппроксимации, Теория приближения функций, Москва, (1977), 322-329.
57. Сендов Б., Попов В., Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа, Математический сборник, Кн. 89, (1972), 138-147.
58. Сендов Бл., Хаусдорфовы приближения, Издательство на БАН, София, (1979).
59. Сулейманов С., О порядке приближения функций интегральными операторами в бесконечной области относительно хаусдорфовой метрики, Доклады АН АзССР, Том 28, (1972), 14-18.
60. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, "ФАН", Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
61. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, Дифференциальные уравнения, (1979), Том 15, № 10, 1814-1823.
62. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Наука, Москва, (1985).
63. Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, Мир, Москва, (1971).
64. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, ДАН СССР, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
65. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., Управление колебаниями, Наука, Москва, (1980).
66. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, *Equations Mathematicae*, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.
67. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, *Applied Mathematics and Computation*, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
68. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
69. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.
70. Ahmad B., Sivasundaram S., Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758. with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 290, № 2, 436-451.
71. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
72. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
73. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in Ahmad B., Sivasundaram S., Setvalued perturbed hybrid integro-differential equations and stability in terms of two measures, *Dynamic Systems and Applications*, (2007), Vol. 16, 299-310.
74. Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
75. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., Continuous-time additive Hopfield-type neural networks *Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
76. Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, *Nonlinear Analysis*:
77. Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 3, 786-791.
78. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
79. Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous system, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
80. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, *Ukrainian Math. J.*, (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
81. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *Computers & Mathematics with Applications*, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
82. population dynamics, *Applicable Analysis*, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
83. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
84. Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
85. Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, *Biomedical Engineering*, (1991), Vol. 38, № 6, 522-521.
86. Bainov D., Covachev V., Impulsive differential equations with a small parameter, *World Scientific*, Singapore, (1994).
87. Bainov D., Covachev V., Stamova I., Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.

88. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type*, J. of Math. Analysis and Applications, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
89. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument*, Kodai Math. J., (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
90. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, Aplicable Analysis, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
91. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument*, J. of Applied Analysis, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
92. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument*, J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
93. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., *Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument*, Georgian Math. J., (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
94. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.
95. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, Multivariate Approximation and Splines, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nürnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
96. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations*, Indian J. pure Appl. Math., (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
97. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamic control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, Math. Model. Numer. Anal., (1990), Vol. 24, № 6, 681-692.
98. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences, (1989), Tome 42, № 12, 29-32.
99. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., *Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations*, Kumamoto J. Math., (1997), Vol. 10, 1-10.
100. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat., (1995), Vol. 41, 45-54.
101. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics*, ANZIAM J., (2002), Vol. 43, 525-539.
102. Bainov D., Dishliev A., *Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses*, International J. Systems Sci., (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
103. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., *Partial averaging for impulsive differential equations with supremum*, Georgian Math. J., (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
104. Bainov D., Hristova S., *Differential equations with maxima*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, New York, (2011).
105. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., *The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect*, J. Korean Math. Soc., (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
106. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations*, Science Culture Technology Publishing, (1994).
107. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., *Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations*, International J. of Theoretical Physics, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
108. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., *L_p -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space*, Proc. Edinburgh Math. Soc., (1992), Vol. 36, 17-33.
109. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., *Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space*, International J. of Theoretical Physics, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
110. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., *Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument*, J. of Math. Analysis and Applications, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
111. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations*, SUT J. of Math., (1995), Vol. 1, 55-71.
112. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Instability of solutions of impulsive systems of differential equations*, International J. of Theoretical Physics, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
113. Bainov D., Markova N., Simeonov P., *Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions*, J. of Computational and Applied Math., (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
114. Bainov D., Milusheva S., *Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses*, J. of Math. Analysis and Applications, (1983), Vol. 95, № 1, 85-101.

115. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
116. Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, *Nonlinear Word*, (1996), Vol. 3, 357-384.
117. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
118. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima", *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
119. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, (1995).
120. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
121. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
122. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, FL, (1998).
123. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
124. Ballinger G., Liu X., Permanence of population growth model with impulsive effects, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
125. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
126. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-361.
127. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1661.
128. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, *International J. of Applied Math. Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
129. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
130. Berezhansky L., Braverman E., On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
131. Braverman E., Mamdani R., Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment, *J. of Mathematical Biology*, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
132. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems, *Nonlinear Analysis*, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
133. Chen G., Shen J., Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A*, (2007), Vol. 14, 177-188.
134. Chen J., Tisdell C., Yuan R., On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
135. Chen S., Qi J., Jin M., Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
136. Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
137. Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
138. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses with respect to the switching functions, *International J. of Applied Science and Technology*, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
139. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
140. Chukleva R., Modeling using differential equations with variable structure and impulses, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
141. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
142. Cordova-Lepe F., Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics, *Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
143. D'onofrio A., Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.

144. Dai B., Su H., Hu D., Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
145. Dhage B., Boucherif A., Ntouyas S., On periodic boundary value problems of first-order perturbed impulsive differential inclusions, *Electronic J. of Differential Equations*, (2004), Vol. 2004, № 84, 1–9.
146. Dimov H., Nenov S., Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems, *Extracta Mathematicae*, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
147. Dishliev A., Bainov D., Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
148. Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive impulses, *Aplicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
149. Dishliev A., Bainov D., Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
150. Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1990), Vol. 29, № 6, 655-671.
151. Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
152. Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
153. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
154. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
155. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. *Methods and applications*, Academic Publications, Ltd. (2011).
156. Dishliev A., Dishlieva K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.
157. Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, *Acta Mathematica Scientia*, (2012), Vol. 32, № 3, 1035-1052.
158. Dishlieva K., Differentiability of solutions of impulsive differential equations with respect to the impulsive perturbations, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications*, (2011), Vol. 12, № 6, 3541-3551.
159. Dishlieva K., Dishliev A., Nenov S., Radeva V., Hausdorff metrics and parametric curves, *International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics*, (2014), Vol. 8, № 2, 53-65.
160. Dishlieva K., Dishliev A., Radeva V., Orbital Hausdorff dependence on impulsive differential equations, (2014), Vol. 13, № 3, 145-163.
161. Dong L., Chen L., Shi P., Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.
162. Dong L., Chen L., Sun L., Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.
163. Elaydi S., Yakubu A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. Diff. Equations Appl.*, (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.
164. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Math. Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
165. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
166. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-321.
167. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
168. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
169. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
170. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
171. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.

172. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6041.
173. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. Biotechnol.*, (2007), Article ID 64870.
174. Georgieva A., Kostadinov S., L_p -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
175. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
176. Georgiou D., Nieto J., Rodríguez-López R., Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 63, № 4, 587-600.
177. Ghana T., Lakshmikantham V., Set differential equations and flow invariance, *Applicable Analysis*, (2003), Vol. 82, № 4, 357-368.
178. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
179. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
180. Gopalsamy K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
181. Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, *J. Math. Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
182. Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
183. Hartman F., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
184. Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, *Math and Computer Modeling*, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
185. Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
186. Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
187. Hristova S., Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
188. Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
189. Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
190. Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
191. Iliev G., Estimation of Hausdorff approximation by Muntz polynomials, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, Tome 29, (1976), 1253-1256.
192. Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
193. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
194. Jin Z., Zhien M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
195. Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
196. Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
197. Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, *Univ. Mishcolc Inst. Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
198. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, *Rostock. Math. Kolloq.*, (1999), Vol. 53, 51-59.
199. Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
200. Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.

201. Kulev G., Bainov D., *Stability of sets for systems with impulses, Tamkang equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
202. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential predator-prey model*, J. of Computational and Applied Mathematics, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
203. Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D., *Stability theory for set differential equations*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, (2004), Vol. 11, 181-189.
204. Lakshmikantham V., Liu X., *Stability for impulsive differential systems in terms of two measures*, Applied Mathematics and Computations, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
205. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., *Hybrid systems with time scales and impulses*, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
206. Lan H.-Y., Nieto J., *On initial value problems for first-order implicit impulsive fuzzy differential equations*, Dynamic Systems and Applications, (2009), Vol. 18, 677-686.
207. Li J., Nieto J., *Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations*, J. of Math. Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
208. Lin D., Hui J., *The best dosage scheme on multiple rapid vein injection*, J. of Biological Systems, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
209. Liu B., Teng Z., Liu W., *Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations*, Chaos Solitons & Fractals, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
210. Liu B., Zhang Y., Chen L., *The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.
211. Liu L., Ye Y., *Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses*, International J. of Computational and Math. Sciences, (2011), Vol. 5, № 4, 229-231.
212. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., *Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure*, J. of Math. Analysis and Applications, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
213. Liu X., Chen L., *Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator*, Chaos Solitons & Fractals, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
214. Liu X., Chen L., *Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations*, J. of Math. Analysis and Applications, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
215. Liu X., Li G., Luo G., *Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse*, J. of Math. Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
216. Liu X., *Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models*, Dyn. Stabil. Syst., (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
217. Luo Z., Shen J., *Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional*, Applied Mathematics Letters, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
218. Markov S., *Relations between the integral and Hausdorff distance with applications to differential equations*, Pliska Studia mathematica bulgarica, Vol. 1, (1977), 112-121.
219. Meng X., Chen L., Li Q., *The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients*, Applied Mathematics and Computation, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
220. Meng X., Chen L., *Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays*, International J. of Biomathematics, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
221. Meng X., Jiao J., Chen L., *The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
222. Meng X., Li Z., Nieto J., *Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment*, J. of Mathematical Chemistry, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
223. Mihailova D., Staneva-Stoytcheva D., *The fundamentals of pharmacokinetics*, State Publishing House, (1987).
224. Milev N., Bainov D., *Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure*, International J. of Theoretical Physics, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
225. Milev N., Bainov D., Roach G., *Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
226. Milev N., Bainov D., *Stability of linear impulsive differential equations*, Computers & Mathematics with Applications, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
227. Naulin R., Pinto M., *Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications*, J. of Math. Analysis and Applications, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
228. Nenov S., Bainov D., *Impulsive dynamical systems*, Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations, (1992), 145-166.
229. Nenov S., *Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics*, Nonlinear Analysis, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
230. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., *Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects*, J. of Computational and Applied Math., (2009), Vol. 224, № 2, 544-551.
231. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., *The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator*, BioSystems, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.

232. Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
233. Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
234. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
235. Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
236. Nieto J., The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy sets and systems*, (1999), Vol. 102, № 1, 159-262.
237. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
238. Penkov B., Sendov B., Hausdorffsche Metrik und Approximationen, *Numer. Math.*, Band 9, (1966), 214-226.
239. Perestyuk M., Chernikova O., Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations, *Ukrainian Math. J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
240. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., Method of averaging for impulsive differential inclusions, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, (1998), Vol. 12, 43-51.
241. Popov V., Approximation of convex functions by algebraic polynomials in Hausdorff's metric, *Serdica Bulgaricae mathematicae publicationes*, Vol. 1, (1975), 386-398.
242. Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, *J. Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-311.
243. Saito Y., The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 268, № 1, 109-124.
244. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
245. Sendov B., Exact estimation for the best Hausdorff spline approximation, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, Tome 30, (1977), 187-190.
246. Sendov B., Order of best Hausdorff polynomial approximation of certain function, *Serdika Bulgaricae mathematicae publicationes*, Vol. 1, (1975), 77-87.
247. Sendov B., Penkov B., Popov V., Markov S., Hausdorff derivatives in F_{Δ} , *Serdica Bulgaricae mathematicae publicationes*, Vol. 2, (1976), 131-137.
248. Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
249. Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, *Tamkang J. Math.*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
250. Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
251. Simeonov P., Bainov D., Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations, *Chinese J. of Math.*, (1993), Vol. 1, 73-80.
252. Skripnik N., Averaging of impulsive differential inclusions with Hukuhara derivative, *Nonlinear Oscillations*, (2007), Vol. 10, № 3, 422-432.
253. Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, *Bulletin of Math. Biology*, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
254. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
255. Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Applied Math. Modeling*, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.
256. Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
257. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), *Bulletin of the Australian Math. Society*, (2008), Vol. 77, 331-341.
258. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Math.*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
259. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.
260. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
261. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
262. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.

263. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
264. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
265. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
266. Vasundhara D., Basic results in impulsive set differential equations, *Nonlinear Studies*, (2003), Vol. 10, № 3, 259-271.
267. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
268. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
269. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
270. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Math. Modeling*, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
271. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
272. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
273. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197201.
274. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
275. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
276. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (2005), Vol. 52, 517-521.
277. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
278. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
279. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
280. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
281. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Math. Society*, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.
282. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
283. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
284. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
285. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
286. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
287. Zhao Z., Jiang J., Lazer A., The permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2004), Vol. 5, № 2, 265-276.

Заклучение

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати, отнасящи се към фундаменталната и качествена теория на неавтономните системи диференциални уравнения с променливи структура и импулси:

1. Изучени са полезни свойства на Хаусдорфовото разстояние между непразни множества в R^n . В частност е установено, че ако всяка от параметричните криви γ и γ^* може да се представи като обединение на непресичащи се криви, т.е.:

$$\gamma = \bigcup_{i=1,2,\dots,k} \gamma_i, \quad \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \quad \text{и} \quad \gamma^* = \bigcup_{i=1,2,\dots,k} \gamma_i^*, \quad \gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset,$$

то Хаусдорфовото разстояние между γ и γ^* е не по-голямо от максималното

Хаусдорфово разстояние между двойките криви γ_i и γ_i^* , $i=1,2,\dots,k$. Тези резултати намират приложение при качествените изследвания на диференциалните уравнения с променливи структура и импулси;

2. Намерени са достатъчни условия за орбитална Хаусдорфова зависимост на решенията на клас неавтономни диференциални уравнения с импулси относно началната точка и разликата между последователни импулсни моменти;
3. Намерени са достатъчни условия за орбитална Хаусдорфова зависимост на решенията на клас неавтономни диференциални уравнения с променливи структура и импулси относно началното условие и импулсните въздействия;
4. Получени са достатъчни условия за орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на клас неавтономни диференциални уравнения с променливи структура и импулси относно началното условие
5. Получените теоретични резултати са приложени върху конкретни динамични математически модели от фармакокинетиката, популационната динамика и теория на автоматичното регулиране.

ДЕКЛАРАЦИЯ

относно авторските права на представените в дисертацията резултати

1. Резултатите и сведенията от увода и част от първата глава (всички параграфи без последния параграф 1.5) са получени предварително от други изследователи. Представеният материал се базира на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Резултатите от параграф 1.5 са публикувани в статията:
Dishlieva K., Dishliev A., Nenov S., Radeva V., Hausdorff metrics and parametric curves, International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics, (2014), Vol. 8, № 2, 53-65.
3. Резултатите от параграф 2.1 са публикувани в статията:
Dishlieva K., Dishliev A., Radeva V., Orbital Hausdorff dependence on impulsive differential equations, (2014), Vol. 13, № 3, 145-163.
4. Резултатите в параграф 3.1 са продължение на изследванията в статията:

Dishliev A., Dishlieva K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.

Новото в представените в параграф 3.1 изследвания (сравнено с посочената статия) се състои в следното:

- Изследваната система е неавтономна, за разлика от цитираната работа;
 - Изучаваната система е с променлива структура, за разлика от цитираната работа, където дясната страна е постоянна;
 - Превключващите множества са безбройно много, като те се променят последователно във времето, докато в посочената работа съответното превключващо множество е единствено.
5. Останалите резултати в дисертацията са нови и се публикуват за първи път тук.

СПИСЪК

на публикации по дисертационния труд с автор Валентина Илиева Радева

1. *Dishlieva K., Dishliev A., Nenov S., Radeva V., Hausdorff metrics and parametric curves, International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics, (2014), Vol. 8, № 2, 53-65.*
2. *Dishlieva K., Dishliev A., Radeva V., Orbital Hausdorff dependence on impulsive differential equations, (2014), Vol. 13, № 3, 145-163.*

Благодарности:

1. Изказвам благодарности на моите научни ръководители проф. Ангел Дишлиев и доц. Катя Дишлиева за постановката на дисертационната тема и за проявената загриженост при реализиране на изследванията;
2. Благодаря на доц. Йорданка Ангелова за помощта, която ми оказа при подготовката и оформлението на научните статии по дисертационния труд;
3. Благодаря на д-р Андрей Антонов за оказаната ми помощ при изготвянето на чертежите, свързани с настоящата дисертация, както и за внимателното прочитане на целия ръкопис на дисертацията и отстраняването на редица технически грешки.

Валентина Радева