



**ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ**

**ДЕПАРТАМЕНТ ПО ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКИ**

**И ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ**

**КАТЕДРА „МАТЕМАТИКА”**

Сашка Ангелова Петкова

## **А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

на дисертация

### **ФУНДАМЕНТАЛНИ, КАЧЕСТВЕНИ И ОПТИМИЗАЦИОННИ ЗАДАЧИ ЗА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРОМЕНЛИВА СТРУКТУРА И ИМПУЛСИ**

за придобиване на образователната и научна степен „доктор”

по научна специалност

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научни ръководители: проф. дхн Асен Гиргинов  
проф. д-р Ангел Дишлиев

Научно жури:

1. доц. д-р Светослав Ненов - Председател
2. проф. дмн Людмил Каранджулов - Рецензент
3. проф. дмн Гани Стамов - Рецензент
4. доц. д-р Валентина Проичева
5. проф. д-р Ангел Дишлиев

София, 2013

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от разширен катедрен съвет на катедра Математика при Химикотехнологичен и металургичен университет (ХТМУ), град София, проведен на 07. 12. 2012 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 04. 02. 2013 от 11 часа в зала 424, сграда А на ХТМУ – София.

**Основни данни за дисертационния труд:**

- автор: гл. ас. Сашка Ангелова Петкова;
- месторабота на автора: главен асистент в катедра Математика на ХТМУ;
- научни ръководители: проф. дхн Асен Гиргинов и проф. д-р Ангел Дишлиев;
- заглавие: "Фундаментални, качествени и оптимизационни задачи за диференциални уравнения с променлива структура и импулси";
- област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
- професионално направление: 4.5. Математика;
- научна специалност: Математ. моделиране и приложения на математиката;
- шифър: 01 01 13;
- съдържание: увод, основно изложение, заключение, декларация, списък на публикациите на автора по дисертацията, библиография;
- брой параграфи в основното изложение: 6, разпределени в 3 глави;
- брой страници на дисертацията: 118;
- брой страници на основното изложение: 91;
- брой фигури: 12;
- брой публикации на автора, свързани с дисертационния труд: 3;
- брой литературни източници в библиографията: 243.

За удобство означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд са идентични.

## Глава 0. Увод

**Описание на основните математически обекти, изследвани в дисертационния труд:** Разглежданите в дисертационния труд проблеми се отнасят към фундаменталната и качествената теория на нелинейните системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси.

От начина, по който се определят моментите, в които се извършват импулсните въздействия и смяната на структурата, системите с променлива структура и импулси се разделят на няколко класа. Тук ще посочим следните класове:

1. Моментите на превключване са предварително фиксирани;
2. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията анулира предварително зададени функции, дефинирани във фазовото пространство на системата. Тези функции се наричат превключващи;
3. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията среща предварително зададени множества (с възможно най-обща структура), дислоцирани във фазовото пространство на системата. Тези множества се наричат превключващи;
4. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които интегралната крива на изучаваната система анулира предварително зададени функции, дефинирани в разширеното фазово пространство на системата;
5. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство на системата (обикновено това са непресичащи се хиперповърхнини);
6. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които решението минимизира (максимизира) дадена функция или функционал;
7. Превключващите моменти имат случаен характер и др.

В дисертационния труд се изучават системи диференциални уравнения от посочените по-горе 2, 4 и 6 тип. Те се състоят от следните структуроопределящи елементи:

1. Съвкупност от системи нелинейни обикновени диференциални уравнения, описващи непрекъснатите етапи от динамиката на моделираните процеси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x) \left( \frac{dx}{dt} = f_i(x) \right), \quad i = 1, 2, \dots;$$

където:

- функциите  $f_1, f_2, \dots \in C[\mathbb{R}^+ \times D, \mathbb{R}^n]$  ( $f_1, f_2, \dots \in C[D, \mathbb{R}^n]$ ), т.е. десните страни на горните системи са непрекъснати функции в дефиниционното си множество,
- фазовото пространство  $D$  е непразна област от  $\mathbb{R}^n$ ;

2. Условия за последователно определяне на моментите на:

- смяната на структурата на системата от диференциални уравнения (смяна на дясната страна),
- импулсни въздействия върху решението.

Тези два типа моменти в общия случай съвпадат помежду си и се наричат с общото наименование моменти на превключване. Те са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$\varphi_i(t, x(t)) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

където функциите  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  се наричат превключващи функции. Те са съответни за всяка една дясна страна и са непрекъснати в разширеното фазово пространство или във фазовото пространство на изучаваните системи от диференциални уравнения, т.е.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[\mathbb{R}^+ \times D, \mathbb{R}]$  или  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C[D, \mathbb{R}]$ . Моментите на превключване означаваме с  $t_1, t_2, \dots$ ;

3. Импулсни функции, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват както следва:

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Импулсните функции  $I_1, I_2, \dots$  са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданите системи с променлива структура и импулси.

Решенията на съответните начални задачи на разглежданите системи диференциални уравнения са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които решенията са непрекъснати отляво.

**Специфични особености и възникващи трудности при изучаване на математическите обекти от дисертацията:** Специфичните особености, свързани с изследването на системите с променлива структура и импулси, а също така и възникващите трудности при тяхното изучаване, са следните:

1. Прекъснатост на решението на съответната начална задача: Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие;

2. Наличие на ефекта „биене“: В този случай, интегралната крива или траекторията на системата диференциални уравнения среща многократно (възможно е и безбройно много пъти) превключващите множества. Тогава, може да се получи ситуация, при която превключващите моменти да притежават точка на съгъстяване и следователно решението да не е продължимо надясно от тази точка. Това означава, че решението „загива“. Поради тази причина при описаната по-горе ситуация, не може да се изучават различни аспекти на качествената теория на този тип системи, като например: непрекъснатата зависимост, периодичност, устойчивост и др.;

3. Загуба на свойството автономност: Независимо, че е възможно десните страни на разглежданите системи да не зависят от времето, то решенията на съответните начални задачи са функции на началния момент. Действително, лесно се съобразява, че решенията зависят от моментите на превключване. От своя страна, превключващите моменти се получават като решения на алгебрични уравнения, в които участва решението. По този начин достигахме до извода, че решението зависи съществено от началния момент;

4. Сливане на решения: Обикновено сливанията се осъществяват след импулсни въздействия върху поне едно от сливащите се решения;

5. Промяна на превключващите моменти при промяна на началното условие: Различните решения (с начални условия, които не съвпадат) имат различни превключващи моменти, включително при едното от тези решения е възможно да липсват превключващи моменти. Такъв е случаят на нулевото решение, което не е подложено на импулсни въздействия;

6. Промяна на превключващите моменти при смущаване на елементи на системата: В общия случай решенията на изследваната начална задача и на съответната смутена начална задача (при едни и същи начални условия) имат различни превключващи моменти. Този факт означава, че съответните им импулсни въздействия са различни по големина и направление;

7. Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при определяне на моментите на смяната на структурата (десните страни на системите), както и при определяне на големините и направленията на импулсните въздействия, се „натрупват“ във времето. Те оказват съществено влияние при пресмятане на големината на решението в даден момент, а също така и на неговото поведение. Така например, при неограничен брой на импулсните въздействия тези „натрупани“ пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават неограничено от изучаваното „непертурбирано“ решение.

**Преглед на основните резултати, свързани с изследваните математически обекти:** Началото на качествената теория на импулсните диференциални уравнения от

разглеждания тип е поставено от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век [21] и [22]. В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на системите с импулсни въздействия. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Въведените математически обекти се оказаха много полезни за математическите приложения, в резултат на което се появиха многобройни изследвания. Тук ще посочим част от монографиите на български автори, отнасящи се за фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения и техните приложения: Д. Байнов и В. Ковачев [59]; Д. Байнов, С. Костадинов и Н. Минх [79]; Д. Байнов и П. Симеонов [92], [93], [94], [95] и [96]; Д. Байнов и С. Христова [77]; В. Лакшмикантам, Д. Байнов и П. Симеонов [169]; Г. Стамов [211]; И. Стамова [218]; А. Дишлиев, К. Дишлиева и С. Ненов [126].

От монографиите, посветени на импулсните диференциални уравнения, с автори извън България, ще споменем: А. Самойленко и Н. Перестюк [30] и [205]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [23]; С. Борисенко, В. Косолапов и А. Оболенский [5]; А. Халанай и Д. Векслер [37]; С. Завалищин и А. Сесекин [10] и [236]; С. Завалищин, А. Сесекин и С. Дрозденко [9]; S. Pandit и S. Deo [200]; M. Benchohra, J. Henderson и S. Ntouyas [98].

Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три общи направления:

1. Пренасяне на някои резултати от диференциалните уравнения в "непрекъснатия случай" към уравненията с импулсни въздействия (виж [6], [7], [8], [29], [38], [40], [42], [44], [45], [50], [51], [56], [59], [87], [88], [99], [135], [136], [140], [146], [147], [149], [152], [154], [158], [166], [167], [168], [172], [182], [189], [190], [195], [197], [198], [199], [207], [229], [235], [242] и др.);

2. Изследвания на специфични качества, характерни само за решенията на уравненията с импулсни въздействия (виж [14], [15], [24], [25], [26], [28], [32], [46], [47], [60], [61], [67], [68], [69], [72], [73], [74], [75], [78], [80], [89], [90], [98], [100], [101], [102], [108], [111], [112], [118], [119], [120], [121], [122], [123], [124], [125], [126], [127], [128], [129], [137], [138], [139], [143], [144], [153], [154], [155], [156], [164], [165], [170], [187], [188], [191], [201], [202], [212], [213], [214], [219], [221], [227] и др.);

3. Моделиране и оптимизиране на процеси от практиката с помощта на импулсни уравнения. При това изучаваните процеси могат да се опишат и изследват адекватно само с такъв тип уравнения (виж [4], [11], [12], [13], [16], [33], [48], [49], [52], [53], [54], [55], [57], [58], [70], [71], [97], [103], [104], [106], [109], [110], [113], [115], [116], [117], [130], [131], [132], [133], [134], [141], [142], [148], [150], [157], [159], [160], [161], [162], [163], [173], [174], [175], [176], [177], [178], [179], [180], [181], [183], [184], [185], [186], [192], [193], [194], [203], [204], [206], [210], [211], [215], [216], [220], [222], [223], [224], [225], [226], [228], [230], [231], [232], [237], [238], [239], [240], [241], [243] и др.).

В следните монографии се изучават системите диференциални уравнения с променлива структура: А. Филиппов [36]; А. Андронов, А. Витт и С. Хайкин [2], В. Бабицкий и В. Крупенин [3]; Н. Перестюк, В. Плотников, А. Самойленко и Н. Скрипник [23] и др.

Диференциалните уравнения с променлива структура са основен математически апарат в теорията на управлението. Тук ще посочим следните резултати: [1], [2], [17], [18], [19], [20], [23], [27], [28], [35], [36], [38], [39], [43], [44], [45], [98], [126], [188], [202], [226], [239].

**Приложения на изследваните уравнения с променлива структура и импулси при моделиране на динамични процеси от практиката:** Този тип уравнения (с променлива структура и импулси) са удобен математически апарат за моделиране на динамични процеси, които се характеризират със следните две особености:

- Процесите са подложени на „кратковременни и интензивни“ външни въздействия (смущения, пертурбации). Предполага се, че времетраенето на външните смущения е пренебрежимо малко в сравнение с общата продължителност на процеса;

- Непосредствено след тези импулсни пертурбации изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нови, различни от предходните, правила и закони.

Ще отбележим (потвърдено от много автори), че интензивното развитие на теорията на диференциалните уравнения с импулси и с постоянна структура се дължи на многобройните им приложения: действието на амортизатор, подложен на ударни въздействия; колебанията на системи от махала при наличие на външни импулсни смущения; ударен модел на часовников механизъм; виброударни системи; билиардни движения на материални точки; релаксионни колебания на електромеханични системи; електронни схеми; затихващ осцилатор, подложен на импулсни въздействия; динамиката на системи за автоматично регулиране; смущения в клетъчни невронни мрежи; импулсни пертурбации в скоростта на развитие на кълбовидни бактерии, подчинени на закона на Schmalhausen; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на изолирана популация; загиване на популации в резултат на импулсни въздействия; импулсна външна намеса и оптимизационни задачи в популационната динамика на съобщество от тип хищник-жертва; епидемиологията; „шокови“ изменения на цените на затворените пазари и др.

Както казахме по-горе, приложенията на диференциалните уравнения с променлива структура и без импулсни въздействия са предимно в теорията на управлението. Освен това с помощта на такива уравнения се изучават: задачи от фармакокинетиката; управление на орбитата на спътник с помощта на радиални ускорения; преминаването на твърдо тяло от флуид с дадена плътност във флуид с друга плътност; изменението на скоростта на химична реакция при прибавянето или отнемането на катализатор и др.

В настоящата дисертация са съчетани тези два типа диференциални уравнения.

Изучаването на скокообразно изменящи се процеси със смяна на законите на развитие е предмет на изследване в редица науки: механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. В тези случаи, използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с променлива структура и импулси, като правило, е задължително.

**Основни цели на дисертационния труд:** Основните цели на дисертационния труд са три:

1. Въвеждат се и се изследват нови класове нелинейни диференциални уравнения с променлива структура и импулси, които представляват адекватен математически апарат при моделирането на прекъснати динамични процеси. Отделно са изследвани случаите, когато превключващите функции са линейни и когато тези функции са нелинейни;

2. Въведени са и са изучени специфични понятия за горния тип уравнения: загиване на решенията чрез импулсни въздействия; непрекъсната зависимост на загиващи решения от импулсните смущения; оптимални импулсни въздействия, оптимални решения и др.

3. Прилагане на резултатите върху известни математически модели. Като пример ще посочим математически модел от фармакокинетиката. Намерените оптимални качества на решенията са интерпретирани в термините на съответния модел. Изрично ще подчертаем, че изследваните оптимални свойства на модела са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в дисертационния труд.

**Основни математически методи, използвани в дисертацията:** Основните методи са свързани с традиционния математически апарат на реалния анализ и в частност на диференциалните уравнения.

**Съдържание:** Дисертационният труд се състои от четири глави, нулевата от които е уводна. Всяка една от останалите три основни глави съдържа по два параграфа.

## Глава 1. Загиване на решения на нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси

В тази глава се изучава специален клас нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Дясната страна на всяка една от тези системи се избира последователно от множество  $f$ , което се състои от безбройно много функции. Имаме

$$f = \{f_i = f_i(t, x), i = 1, 2, \dots\}.$$

Основни елементи на всяка система диференциални уравнения от разглеждания тип са множеството от превключващи функции

$$\varphi = \{\varphi_i = \varphi_i(x), i = 1, 2, \dots\}$$

и множеството от импулсни функции

$$I = \{I_i = I_i(x), i = 1, 2, \dots\}.$$

Всяка една от превключващите функции  $\varphi_i$  и импулсните функции  $I_i$  е съответна на дясната страна  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Поредната  $i$ -та промяна на дясната страна на системата (смяната на  $f_i$  с  $f_{i+1}$ ) и съответното импулсно въздействие върху решението

$$x(t_i) \rightarrow x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i))$$

се извършват в така наречения  $i$ -ти по ред момент на превключване  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Точно в този момент решението анулира превключващата функция  $\varphi_i$ , т.е.

$$\varphi_i(x(t_i)) = 0, i = 1, 2, \dots.$$

Още веднъж ще подчертаем, че след всеки момент на превключване изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нов закон на развитие (нова дясна страна на системата). Освен това, достигнатата стойност  $x(t_i)$  в момента на превключване  $t_i$  се различава от началната точка  $x(t_i + 0)$ , от която стартира процесът след този момент. Това обстоятелство се дължи на дискретното импулсно въздействие върху решението, което се осъществява във всеки един момент на превключване. Този факт същевременно означава, че решението е прекъснато в моментите на превключване.

Диференциалните уравнения с променлива структура и импулси са въведени в [188]. Някои качествени свойства на техните решения са изучени в [112] и [126]. В работи [111] и [113] уравненията с променлива структура и импулси се използват при изучаването на динамиката на затвора на хидравличен клапан.

Подобни на разглежданите в дисертацията импулсни системи (без промяна на структурата) се изследват в редица публикации. Като примери тук ще посочим: [30], [32], [52], [68], [75], [90], [100], [101], [102], [108], [119], [120], [121], [123], [124], [126], [128], [129], [137], [138], [139], [214] и др.

Основната цел в тази глава е да се изследват системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси, решенията на които не са продължими до безкрайност. Изучен е случаят, когато причина за непродължимостта на решенията (или както е прието да се казва загиване на решенията) са импулсните въздействия.

В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за загиване на решенията на съответните начални задачи за описаните по-горе системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси в случай, че превключващите функции са нелинейни. С други думи, за посочения клас уравнения са получени достатъчни условия, при които решенията не са продължими от известно място нататък.

Основен обект на изследване в този параграф е следната начална задача:

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \quad t_{i-1} < t < t_i,$$

$$(1.2) \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(1.3) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),$$

$$(1.4) \quad x(t_0) = x_0,$$

Решението на изучаваната задача е непрекъснато отляво в моментите  $t_1, t_2, \dots$ . Това означава, че решението е непрекъснато отляво във всяка точка от максималния интервал на съществуване. От друга страна, в общия случай (например, когато функциите  $I_i(x) \neq 0$  при  $x \in D$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ) това решение е прекъснато отляво в посочените по-горе точки. Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът“ на решението в тези точки е ограничен. По-нататък, решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) ще означаваме с  $x(t; t_0, x_0)$ .

Ще използваме означенията:

- $f = \{f_1, f_2, \dots\}$ ,  $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ,  $I = \{I_1, I_2, \dots\}$ ;
- Множествата  $\Phi_i = \{x \in D; \varphi_i(x) = 0\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , които се наричат превключващи хиперповърхнини на изучаваната начална задача;
- Функцията  $I_0(x) = 0$  при  $x \in D$ . Валидно е равенството  $(Id + I_0)(x) = x$ ,  $x \in D$ ;
- Интервалът  $J(t_0, x_0, f_i)$  е максималният интервал на съществуване на решението на задачата

$$(1.8) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots;$$

- Интервалът  $J(t_0, x_0, f)$  е максималният интервал на съществуване на решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3), (1.4);
- Функцията  $x_i(t; t_0, x_0)$  е решение на задачата с постоянна структура и без импулси (1.8) при  $t \in J(t_0, x_0, f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ;
- Кривата  $\gamma(t_0, x_0) = \{x(t; t_0, x_0), t \in J(t_0, x_0, f)\}$  е траекторията на изучаваната задача;
- Кривата  $\gamma_i(t_0, x_0) = \{x_i(t; t_0, x_0), t \in J(t_0, x_0, f_i)\}$  е траекторията на задачата (1.8);
- $\|\cdot\|$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  са съответно Евклидовата норма и скалярно произведение в  $\square^n$ ;
- Множеството  $B_\delta(x_0) = \{x \in \square^n; \|x - x_0\| < \delta\}$  е  $\delta$ -околност на точката  $x_0$ ;
- Разстоянието между непразните множества  $A, B \subset \square^n$  дефинираме с помощта на равенството

$$\rho(A, B) = \inf \{\|x_A - x_B\|; x_A \in A, x_B \in B\}.$$

**Дефиниция 1.2.** Ще казваме, че решенията на системата (1.1), (1.2), (1.3) загиват поради импулсните въздействия, ако:

1. За началната задача (1.8) е изпълнено

$$(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in D)(\forall i = 1, 2, \dots) \\ \Rightarrow J(t_0, x_0, f_i) = [t_0, \infty);$$

2. Имаме

$$(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in D) \\ (\exists I_1 = I_1(t_0, x_0), I_2 = I_2(t_0, x_0), \dots; I_1, I_2, \dots: D \rightarrow \square^n)$$

$$\left(\exists t^0 = t^0(t_0, x_0, I_1, I_2, \dots) = \text{const} \in \mathbb{R}, t^0 > t_0\right):$$

$$J(t_0, x_0, f) = [t_0, t^0).$$

С други думи, е изпълнено:

1. При всеки избор на начална точка от разширеното фазово пространство на разглежданата система и при всяка фиксирана дясна страна, принадлежаща на множеството от дясни страни на основната система (1.1), решението на съответната начална задача с постоянна структура и без импулси е продължимо до безкрайност;

2. При всеки избор на начална точка от разширеното фазово пространство съществуват импулсни функции, такива, че решението на съответната задача с променлива структура и импулси (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) притежава ограничен максимален интервал на съществуване.

Въвеждаме следните условия:

H1.1. Функциите  $f_i \in C[\mathbb{R}^+ \times D, \mathbb{R}^n]$ ,  $i = 1, 2, \dots$

H1.2. Функциите  $\varphi_i \in C^1[D, \mathbb{R}]$ ,  $i = 1, 2, \dots$

H1.3. Функциите  $I_i \in C[\Phi_i, \mathbb{R}^n]$  и  $(Id + I_i): \Phi_i \rightarrow D$ ,  $i = 1, 2, \dots$

H1.4. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_1((Id + I_0)(x)) \cdot \langle \text{grad} \varphi_1(x), f_1(t, x) \rangle < 0, (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (D \setminus \Phi_1),$$

където  $I_0(x) = 0$ ,  $x \in D$ , и

$$\varphi_i((Id + I_{i-1})(x)) \cdot \langle \text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle < 0, (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D, i = 2, 3, \dots$$

H1.5. Съществуват константи  $C_{\langle \text{grad} \varphi_i, f_i \rangle} > 0$  такива, че

$$(\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D) \Rightarrow \left| \langle \text{grad} \varphi_i(x), f_i(t, x) \rangle \right| \geq C_{\langle \text{grad} \varphi_i, f_i \rangle}, i = 1, 2, \dots$$

H1.6. За всяка точка  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times D$  и за всяко  $i = 1, 2, \dots$  решението на началната задача (1.8) съществува и е единствено за  $t \geq t_0$ .

H1.7. Съществуват константи  $C_{\varphi_i} > 0$  такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow \left| \varphi_{i+1}((Id + I_i)(x)) \right| \leq C_{\varphi_{i+1}}, i = 1, 2, \dots$$

H1.8. Редът  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi_{i+1}}}{C_{\langle \text{grad} \varphi_{i+1}, f_{i+1} \rangle}}$  е сходящ.

Основните теореми в първия параграф на главата са следните:

**Теорема 1.1.** Нека са изпълнени условията H1.1 и H1.6.

Тогава решението на задачата (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) съществува и е единствено надясно от началния момент  $t_0$ .

**Теорема 1.2.** Нека са изпълнени условията H1.1÷H1.6.

Тогава траекторията на задачата (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) среща всяка една от хиперповърхнините  $\Phi_i = \{x \in D; \varphi_i(x) = 0\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Теорема 1.4.** Нека са изпълнени условията H1.1÷H1.8.

Тогава решенията на системата (1.1), (1.2), (1.3) загиват поради импулсните въздействия.

Същият въпрос е изучен и във втория параграф на главата. Изследванията се отнасят за сравнително по-лекия, но важен за практиката случай на нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с импулси и линейни превключващи функции.

Обект на изследване в параграфа е следната начална задача:

$$(1.12) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \langle a_i, x(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1} < t < t_i,$$

$$(1.13) \quad \langle a_i, x(t_i) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(1.14) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),$$

$$(1.15) \quad x(t_0) = x_0.$$

Както се вижда от (1.12) и (1.13) превключващите функции са линейни, а съответните превключващи множества:

$$\Phi_i = \{x \in D; \langle a_i, x \rangle = a_i^1 x^1 + a_i^2 x^2 + \dots + a_i^n x^n = \alpha_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

представяват части от хиперравнини, разположени във фазовото пространство на системата. Решението на задачата (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) означаваме както и в предходния параграф с  $x(t; t_0, x_0)$ .

По-нататък ще използваме следните условия:

H1.9. Изпълнени са равенствата  $\|a_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots$

H1.10. Валидни са неравенствата:

$$(\langle a_i, x \rangle - \alpha_i) \cdot \langle a_i, f_i(t, x) \rangle < 0, \quad (t, x) \in \square^+ \times (D \setminus \Phi_i),$$

$$(\langle a_i, (Id + I_{i-1})(x) \rangle - \alpha_i) \cdot \langle a_i, f_i(t, x) \rangle < 0, \quad (t, x) \in \square^+ \times D, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.11. Съществуват константи  $C_{\langle a_i, f_i \rangle} > 0$  такива, че

$$(\forall (t, x) \in \square^+ \times D) \Rightarrow |\langle a_i, f_i(t, x) \rangle| \geq C_{\langle a_i, f_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.12. Съществуват константи  $C_{a_i} > 0$  такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow |\langle a_{i+1}, (Id + I_i)(x) \rangle - \alpha_{i+1}| \leq C_{a_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H1.13. Редът  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{a_{i+1}}}{C_{\langle a_{i+1}, f_{i+1} \rangle}}$  е сходящ.

В идейно отношение следващите теореми са близки до съответните теореми от предходния параграф.

**Теорема 1.5.** Нека са изпълнени условията H1.1, H1.3, H1.6, H1.9, H1.10, H1.11.

Тогава траекторията на задачата (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) среща всяка една от хиперравнините  $\Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots$

**Теорема 1.7.** Нека са изпълнени условията H1.1, H1.3, H1.6, H1.9÷H1.13.

Тогава решенията на системата (1.12), (1.13), (1.14) загиват поради импулсните въздействия.

## Глава 2. Непрекъсната зависимост на загиващи решения на нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси

Основен обект на изследване в тази глава са системите диференциални уравнения с променлива структура и импулси, които бяха изучени в предходната глава. За загиващите решения на тези системи са въведени различни видове непрекъсната зависимост: от началните условия, от десните страни, от превключващите функции и от импулсните въздействия.

Основната цел на изследванията в главата е да се установи, че за всеки затворен интервал, който се съдържа в максималния интервал на съществуване на загиващото решение на основната задача, това решение зависи непрекъснато от смущенията. Или по друг начин казано, до всеки фиксиран момент преди момента на смъртта решението реагира "слабо" на "достатъчно слаби външни смущения".

В първия параграф на главата са намерени достатъчни условия за непрекъсната зависимост на загиващите решения относно началните условия и превключващите функции. Допуска се превключващите функции да са нелинейни.

Обект на изследване в този параграф е разглежданата по-рано в § 1.1 начална задача за системи нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти:

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \quad t_{i-1} < t < t_i,$$

$$(2.2) \quad \varphi_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(2.3) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),$$

$$(2.4) \quad x(t_0) = x_0.$$

Заедно с основната задача ще разгледаме и така наречената смутена начална задача:

$$(2.5) \quad \frac{dx^*}{dt} = f_i^*(t, x^*), \quad \varphi_i^*(x^*(t)) \neq 0, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*,$$

$$(2.6) \quad \varphi_i^*(x^*(t_i^*)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(2.7) \quad x^*(t_i^* + 0) = x^*(t_i^*) + I_i^*(x^*(t_i^*)),$$

$$(2.8) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*.$$

Ще използваме означенията:  $f = \{f_1, f_2, \dots\}$ ,  $f^* = \{f_1^*, f_2^*, \dots\}$ ,  $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ,  $\varphi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots\}$ ,  $I = \{I_1, I_2, \dots\}$ ,  $I^* = \{I_1^*, I_2^*, \dots\}$ .

Решенията на горните две задачи означаваме съответно с  $x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)$  и  $x^*(t; t_0^*, x_0^*, f^*, \varphi^*, I^*)$ , а съответните им траектории - с  $\gamma(t_0, x_0, f, \varphi, I)$  и  $\gamma^*(t_0^*, x_0^*, f^*, \varphi^*, I^*)$ .

Както се вижда от горните равенства, смущенията се отнасят за всички елементи на системата с променлива структура и импулси, а именно:

- начален момент;
- начална точка;
- десни страни на системата;
- превключващи функции;
- импулсни функции.

Тези смущения рефлектират върху моментите на превключване. В общия случай е изпълнено  $t_1^* \neq t_1, t_2^* \neq t_2, \dots$ .

По-нататък ще предполагаме, че решенията на основната задача загиват при наличие на импулсните въздействия. Максималните интервали на съществуване на разглежданите задачи (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) ще означаваме съответно с:  $J(t_0, x_0, f, \varphi, I) = [t_0, t^0)$  и  $J^*(t_0^*, x_0^*, f^*, \varphi^*, I^*) = [t_0^*, t^{0*})$ .

**Дефиниция 2.1.** Ще казваме, че загиващото решение

$x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)$  на началната задача (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) зависи непрекъснато:

- от началното условие, ако

$$(f^* = f, \varphi^* = \varphi, I^* = I)$$

и

$$(\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) (\forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \cap J^*(t_0^*, x_0^*, f, \varphi, I))$$

$$\begin{aligned}
& (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, t_0, x_0) > 0) \left( \exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, t_0, x_0) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta \right): \\
& \left( \forall t_0^* \in \square^+, |t_0^* - t_0| < \delta \right) \left( \forall x_0^* \in D \cap B_{\delta}(x_0), \varphi_1(x_0^*) \neq 0 \right) \\
& \Rightarrow \left\| x^*(t; t_0^*, x_0^*, f, \varphi, I) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I) \right\| < \varepsilon, \\
& t \in [t_0^{\max}, T], |t - t_i| > \eta_i, \quad i=1, 2, \dots;
\end{aligned}$$

- при постоянно действащи смущения, ако

$$\left( (t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0), \varphi^* = \varphi, I^* = I \right)$$

и

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \left( \forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \cap J^*(t_0, x_0, f^*, \varphi, I) \right) \\
& (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, f) > 0) \left( \exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, f) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta \right): \\
& \left( \forall f_i^* : \square^+ \times D \rightarrow \square^n, \|f_i^*(t, x) - f_i(t, x)\| < \delta, (t, x) \in \square^+ \times D, \quad i=1, 2, \dots \right) \\
& \Rightarrow \left\| x^*(t; t_0, x_0, f^*, \varphi, I) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I) \right\| < \varepsilon, \\
& t \in [t_0, T], |t - t_i| > \eta_i, \quad i=1, 2, \dots;
\end{aligned}$$

- от превключващите функции, ако

$$\left( (t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0), f^* = f, I^* = I \right)$$

и

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \left( \forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \cap J^*(t_0, x_0, f, \varphi^*, I) \right) \\
& (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, \varphi) > 0) \left( \exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, \varphi) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta \right): \\
& \left( \forall \varphi_i^* : D \rightarrow \square, \|\varphi_i^*(x) - \varphi_i(x)\| < \delta, \quad x \in D, \quad i=1, 2, \dots \right) \\
& \Rightarrow \left\| x^*(t; t_0, x_0, f, \varphi^*, I) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I) \right\| < \varepsilon, \\
& t \in [t_0, T], |t - t_i| > \eta_i, \quad i=1, 2, \dots;
\end{aligned}$$

- от импулсните въздействия, ако

$$\left( (t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0), f^* = f, \varphi^* = \varphi \right)$$

и

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon = \text{const} > 0) (\forall \eta = \text{const} > 0) \left( \forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \cap J^*(t_0, x_0, f, \varphi, I^*) \right) \\
& (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, I) > 0) \left( \exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, I) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta \right): \\
& \left( \forall I_i^* : D \rightarrow \square^n, \|I_i^*(x) - I_i(x)\| < \delta, \quad x \in D, \quad i=1, 2, \dots \right) \\
& \Rightarrow \left\| x^*(t; t_0, x_0, f, \varphi, I^*) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I) \right\| < \varepsilon, \\
& t \in [t_0, T], |t - t_i| > \eta_i, \quad i=1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

В този параграф ще посочим достатъчни условия за непрекъснатата зависимост на загиващите решения относно началното условие и превключващите функции. В този случай смутената начална задача има вида:

$$(2.9) \quad \frac{dx^*}{dt} = f_i(t, x^*), \quad \varphi_i^*(x^*(t)) \neq 0, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*,$$

$$(2.10) \quad \varphi_i^*(x^*(t_i^*)) = 0, \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(2.11) \quad x^*(t_i^* + 0) = x^*(t_i^*) + I_i(x^*(t_i^*)),$$

$$(2.12) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*.$$

Въвеждаме условията:

H2.1. Съществуват константи  $C_{f_i} > 0$  такива, че

$$(\forall (t, x) \in \square^+ \times D) \Rightarrow \|f_i(t, x)\| \leq C_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

H2.2. Съществуват константи  $C_{Lip\varphi_i} > 0$  такива, че

$$(\forall x', x'' \in D) \Rightarrow |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| \leq C_{Lip\varphi_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

H2.3. Съществуват константи  $C_{LipI_i} > 0$  такива, че

$$(\forall x', x'' \in D) \Rightarrow |I_i(x') - I_i(x'')| \leq C_{LipI_i} \|x' - x''\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Основният резултат в параграфа е следната теорема.

**Теорема 2.9.** Нека са изпълнени условията H1.1÷H1.8, H2.1, H2.2 и H2.3.

Тогава загиващото решение  $x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)$  на началната задача (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) зависи непрекъснато относно началното условие и превключващите функции.

Във втория параграф се разглежда същата начална задача с линейни превключващи функции. Намерени са достатъчни условия за непрекъсната зависимост на решенията относно началните условия и импулсните въздействия.

Обект на изследване в параграфа е началната задача, разгледана в параграф 1.2:

$$(2.29) \quad \frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \quad \langle a_i, x(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1} < t < t_i,$$

$$(2.30) \quad \langle a_i, x(t_i) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(2.31) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),$$

$$(2.32) \quad x(t_0) = x_0.$$

Въвеждаме съответната смутена начална задача:

$$(2.33) \quad \frac{dx^*}{dt} = f_i(t, x^*), \quad \langle a_i, x^*(t) \rangle \neq \alpha_i, \quad t_{i-1}^* < t < t_i^*,$$

$$(2.34) \quad \langle a_i, x^*(t_i^*) \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(2.35) \quad x^*(t_i^* + 0) = x^*(t_i^*) + I_i^*(x^*(t_i^*)),$$

$$(2.36) \quad x^*(t_0^*) = x_0^*.$$

Следната теорема е основна в параграфа.

**Теорема 2.11.** Нека са изпълнени условията H1.1, H1.3, H1.6, H1.9÷H1.13, H2.1 и H2.3.

Тогава загиващото решение  $x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)$  на началната задача (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) зависи непрекъснато относно началното условие и импулсните въздействия.

### Глава 3. Оптимални импулсни въздействия и максимални интервали на съществуване на решенията на автономни диференциални уравнения. Приложения

Основен обект на изследване в настоящата глава е специфичен клас нелинейни, автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсно въздействие. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива

среща така нареченото "барьерно множество", което в изследвания случай съвпада с "барьерна права", успоредна на оста на времето. Освен това барьерната права е разположена в разширеното фазово пространство на разглежданите уравнения и съвпада с контура на множеството, в което лежат интегралните криви на изучаваните начални задачи. За този клас уравнения импулсните моменти не са фиксирани. Непосредствено се вижда, че те зависят както от началната точка, така и от други параметри на уравнението. Такива са например: дясната страна на уравнението, разположението на барьерните криви, големините на импулсните въздействия и др. Още веднъж ще подчертаем, че ако някой от параметрите на уравнението се промени, то в общия случай се променят и моментите, в които се осъществяват импулсите.

Споменатите по-горе понятия: барьерни множества (в частност барьерни криви); разширена фазова полуравнина; импулсни въздействия, за които моментите на осъществяване се определят с помощта на барьерните множества; както и понятието непрекъсната зависимост на решенията по отношение на тези множества и др. се въвеждат и изследват за първи път в [126] и [128].

В първия параграф на главата за споменатия тип уравнения са намерени импулсни въздействия, които са оптимални в смисъла, който ще формулираме по-нататък. За целта нека полуравнината, определена с помощта на барьерната права и която съдържа началната точка и съответните интегрални криви на диференциалното уравнение, стартиращи от тази начална точка, наречем разширена фазова полуравнина. Нека интегралните криви на уравненията от посочения тип проявяват постоянни тенденции за напускане на разширената фазова полуравнина. По друг начин казано, интегралните криви (независимо от началната точка) пресичат барьерната права. Възможно е чрез подходящи импулсни въздействия за определен период от време интегралната крива да се задържи в разширената фазова полуравнина. Нека големината на всяко импулсно въздействие е ограничена отдолу и нека сумата от големините на всичките импулсни въздействия е предварително фиксирана. Тогава се търси такъв набор от импулсни въздействия, при които съответната интегралната крива има максимален времеви период на принадлежност към разширената фазова полуравнина.

Основен обект на изследване в настоящия параграф е следната начална задача за нелинейни автономни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия:

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \text{ ако } x(t) > X^{\min}, \text{ м.е. } t_{i-1} < t \leq t_i,$$

$$(3.2) \quad x(t_i) = X^{\min}, i = 1, 2, \dots,$$

$$(3.3) \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i = X^{\min} + I_i,$$

$$(3.4) \quad x(t_0) = x_0.$$

Ще използваме означението  $I = \{I_1, I_2, \dots\}$ . Валидни са неравенствата

$$X^{\min} < x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i = X^{\min} + I_i, i = 1, 2, \dots.$$

По-нататък множеството  $\Phi^{\min} = \{(t, x); t \in \mathbb{R}^+, x = X^{\min}\}$  ще наричаме барьерно (в случая барьерна права). Ще отбележим, че при  $t \in \mathbb{R}^+$  е възможно интегралната крива на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) да срещне многократно барьерното множество  $\Phi^{\min}$ . Нека тези срещи се реализират последователно в моментите  $t_1, t_2, \dots$ , за които са валидни неравенствата  $0 < t_0 < t_1 < t_2, \dots$ . Тези моменти ще наричаме превключващи или импулсни моменти. Решението на разглежданата задача е по части непрекъсната функция с точки на прекъсване, съвпадащи с импулсните моменти. Точките на прекъсване са от първи род и в тях решението е непрекъснато отляво. По-точно имаме:

1. При  $t_0 \leq t \leq t_1$  решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) е идентично с решението на задачата (без импулси)

$$(3.5) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0;$$

2. Ако интегралната крива среща в момента  $t_i$  бариерното множество, т.е. ако е изпълнено  $x(t_i) = X^{\min}$ , то при  $t_i < t \leq t_{i+1}$ , решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) съвпада с решението на задачата (без импулсни въздействия):

$$(3.6) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i = X^{\min} + I_i, \quad i=1, 2, \dots$$

Решението на изследваната задача с импулси (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) означаваме с

$$x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2, \dots) = x_{imp}(t; t_0, x_0, I).$$

Освен основната задача ще разгледаме и съответната й смутена задача

$$(3.11) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \text{ако } x(t) > X^{\min}, \text{ т.е. } t_{i-1}^* < t \leq t_i^*,$$

$$(3.12) \quad x(t_i^*) = X^{\min}, \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(3.13) \quad x(t_i^* + 0) = x(t_i^*) + I_i^* = X^{\min} + I_i^*,$$

$$(3.14) \quad x(t_0^*) = x_0^*.$$

Решението на смутената начална задача (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) означаваме с

$$x_{imp}(t; t_0^*, x_0^*, I_1^*, I_2^*, \dots) = x_{imp}(t; t_0^*, x_0^*, I^*).$$

Въвеждаме следните условия:

НЗ.1. Функцията  $f \in C[\square^+, \square^-]$ .

НЗ.2. Функцията  $f$  е монотонно намаляваща при  $x \geq X^{\min}$ .

НЗ.3. Съществува положителна константа  $I^{\min}$  такава, че всички импулсни въздействия са не по-малки от нея.

НЗ.4. За всяка начална точка  $(t_0, x_0) \in \square^+ \times (X^{\min}, \infty)$  решението на началната задача (3.5) съществува и е единствено за  $t \geq t_0$ .

**Дефиниция 3.1.** Нека константите  $I^{\min}, I_{\Sigma} \in \square^+$  и  $I^{\min} \leq I_{\Sigma}$ .

(Константата  $I^{\min}$  е фиксираната долна граница на големините на импулсните въздействия. Константата  $I_{\Sigma}$  е максималната допустима сума от големините на импулсните въздействия).

Ще казваме, че импулсните въздействия  $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*$  са допустими, ако са валидни неравенствата:

$$1. \quad I_1^* \geq I^{\min}, \quad I_2^* \geq I^{\min}, \dots, I_k^* \geq I^{\min};$$

$$2. \quad I_1^* + I_2^* + \dots + I_k^* \leq I_{\Sigma}.$$

**Дефиниция 3.2.** Нека константите  $I^{\min}, I_{\Sigma} \in \square^+$  и  $I^{\min} \leq I_{\Sigma}$ .

Ще казваме, че импулсните въздействия  $I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt}$  са оптимални, ако:

$$1. \quad I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt} \text{ са } k_{opt} \text{ на брой допустими импулсни въздействия};$$

2.  $t_{k_{opt}+1}^{opt}$  е моментът, в който интегралната крива  $\left(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt})\right)$  среща бариерното множество за  $(k_{opt} + 1)$ -ви път;

3.  $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*$  са произволни допустими импулсни въздействия;

4  $t_{k+1}^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, \dots, I_k^*))$  среща бариерното множество за  $(k+1)$ -ви път,

тогава е изпълнено  $t_{k_{opt}+1}^{opt} \geq t_{k+1}^*$ .

Освен това решението  $x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt})$  и съответната интегрална крива също ще наричаме оптимални.

С други думи, интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^{opt}, \dots, I_{k_{opt}}^{opt}))$  е оптимална, ако среща бариерната права след  $k_{opt}$  на брой допустими импулсни въздействия в момента  $t_{k_{opt}+1}^{opt}$ . При това този импулсен момент е сравнително най-отдалечен от началния момент  $t_0$ . Сравнението е с всички други импулсни моменти, в които съответните интегрални криви срещат бариерното множество след  $k$  на брой допустими импулсни въздействия.

Целта на изследванията в параграфа е да се изберат амплитудите (големините) и броят на допустимите импулсни въздействия, които са оптимални. Ще повторим, че съответната им оптимална интегрална крива в продължение на най-дълъг период от време принадлежи на полуравнината, разположена "над бариерната права". Тази полуравнина наричаме разширена фазова полуравнина.

За удобство въвеждаме понятието максимален интервал на съществуване (принадлежност) на интегралната крива в разширената фазовата полуравнина.

**Дефиниция 3.3.** Нека  $x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)$  е решение на началната задача (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), подложено на  $k$  на брой импулсни въздействия.

Тогава интервалът  $J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) = [t_0, t_{k+1}^*]$  се нарича максимален интервал на съществуване на интегралната крива в разширената фазова полуравнина, ако:

1.  $(\forall t \in J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)) \Rightarrow x(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) \geq X^{\min}$ ;
2.  $(\forall t > t_{k+1}^*) \Rightarrow x(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) < X^{\min}$ .

Основните резултати се съдържат в следните теореми:

**Теорема 3.1.** Нека са изпълнени условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

Тогава за всяка начална точка  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times (X^{\min}, \infty)$  съответната интегрална крива на началната задача (3.5) среща бариерната права  $\Phi^{\min}$ .

**Теорема 3.2.** Нека са изпълнени условията НЗ.1 ÷ НЗ.4.

Тогава е валидна оценката

$$t_{i+1} - t_i \geq \frac{-I^{\min}}{f(X^{\min} + I^{\min})}, \quad i = 1, 2, \dots$$

**Теорема 3.3.** Нека са изпълнени условията НЗ.1 ÷ НЗ.4.

Тогава решението на задачата (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) съществува и е единствено надясно от началния момент  $t_0$ .

**Теорема 3.4.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.
2. Точката  $\theta_1^*$  удовлетворява неравенствата  $t_0 < \theta_1^* < t_1$ .

Тогава  $x(t_1; \theta_1^*, x(\theta_1^*; t_0, x_0) + I_1) < X^{\min} + I_1$ .

**Теорема 3.5.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

2.  $I_1, I_2 \in \square^+$ ,  $I_1^* = I_2$  и  $I_2^* = I_1$ .

Тогава  $J(I_1^*, I_2^*) = J(I_1, I_2)$ .

По-подробно, ако:

-  $t_3^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*))$  среща бариерното множество  $\Phi^{\min}$  след второто импулсно въздействие;

-  $t_3$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2))$  среща бариерното множество след второто импулсно въздействие,

то  $t_3^* = t_3$ .

**Теорема 3.6.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

2.  $I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*, I_1, I_2, \dots, I_n \in \square^+$ .

3.  $I_1^* = I_1, \dots, I_{i-1}^* = I_{i-1}, I_i^* = I_{i+1}, I_{i+1}^* = I_i, I_{i+2}^* = I_{i+2}, \dots, I_n^* = I_n$ .

Тогава  $J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*) = J(I_1, I_2, \dots, I_n)$ .

С други думи, ако:

-  $t_{n+1}^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*))$  среща бариерното множество  $\Phi^{\min}$  след  $n$ -тото поред импулсно въздействие;

-  $t_{n+1}$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2, \dots, I_n))$  среща бариерното множество след  $n$ -тото поред въздействие,

то  $t_{n+1}^* = t_{n+1}$ .

**Теорема 3.7.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

2.  $I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*, I_1, I_2, \dots, I_n \in \square^+$ .

3.  $\{I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*\} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ .

Тогава  $J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*) = J(I_1, I_2, \dots, I_n)$  или, което е същото,  $t_{n+1}^* = t_{n+1}$ .

**Теорема 3.8.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

2.  $I_1^*, I_1, I_2 \in \square^+$  и  $I_1^* = I_1 + I_2$ .

Тогава  $J(I_1^*) \subset J(I_1, I_2)$ .

С други думи, ако:

-  $t_2^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*))$  среща бариерното множество  $\Phi^{\min}$  след първото импулсно въздействие;

-  $t_3$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2))$  среща бариерното множество след второто импулсно въздействие.

то  $t_2^* \leq t_3$ .

**Теорема 3.9.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1, НЗ.2 и НЗ.4.

2.  $I_1^*, I_2^*, I_1, I_2 \in \square^+$ ,  $I_1^* + I_2^* = I_1 + I_2$  и  $I_1 = I_2 = \frac{I_1^* + I_2^*}{2}$ .

Тогава  $J(I_1^*, I_2^*) \subset J(I_1, I_2)$ . По-подробно, ако

- $t_3^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*))$  среща бариерното множество  $\Phi^{\min}$  след второто импулсно въздействие;
- $t_3$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2))$  среща бариерното множество след второто импулсно въздействие,  
то  $t_3^* \leq t_3$ .

Основният резултат в параграфа се дава с помощта на следната теорема:

**Теорема 3.10.** Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията НЗ.1÷НЗ.4.
2. Сумата от всички импулсни въздействия е равна на  $I_\Sigma \in \mathbb{R}^+$ .
3. Константата  $n \in \mathbb{N}$  удовлетворява неравенствата  $\frac{I_\Sigma}{n+1} < I^{\min} \leq \frac{I_\Sigma}{n}$ .
4.  $I_1 = I_2 = \dots = I_n = \frac{I_\Sigma}{n}$ .
5.  $I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^* \in \mathbb{R}^+$ ,  $I_1^* \geq I^{\min}$ ,  $I_2^* \geq I^{\min}$ , ...,  $I_k^* \geq I^{\min}$  и  $I_1^* + I_2^* + \dots + I_k^* = I_\Sigma$ .

Тогава  $J(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) \subset J(I_1, I_2, \dots, I_n)$ .

Еквивалентно на горното твърдение е следното: Ако

- $t_{n+1}$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1, I_2, \dots, I_n))$  среща бариерното множество за  $(n+1)$ -ви път;
- $t_{k+1}^*$  е моментът, в който интегралната крива  $(t, x_{imp}(t; t_0, x_0, I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*))$  среща бариерното множество за  $(k+1)$ -ви път,  
то  $t_{n+1} \geq t_{k+1}^*$ .

С други думи, импулсните въздействия  $I_1, I_2, \dots, I_n$  са оптимални.

**Забележка 3.3.** Оптималните импулсни въздействия и техният брой определяме както следва:

1. Намираме цялата част  $n$  на частното  $\frac{I_\Sigma}{I^{\min}}$ . Броят на оптималните импулсни въздействия е  $n_{opt} = n$ ;
2. Определяме големината на оптималните импулсни въздействия:  $I^{opt} = \frac{I_\Sigma}{n_{opt}}$ ;
3. Оптималните импулсни въздействия са  $I_1^{opt}, I_2^{opt}, \dots, I_{n_{opt}}^{opt}$ , за които са изпълнени равенствата:  $I_1^{opt} = I_2^{opt} = \dots = I_{n_{opt}}^{opt} = I^{opt}$ .

В последните години импулсните диференциални уравнения с променливи моменти на импулсно въздействие и приложенията им при решаване на различни практически оптимизационни задачи предизвикват сериозен научен интерес. Тук ще посочим следните резултати: [10], [51], [52], [53], [54], [55], [57], [58], [70], [71], [115], [116], [126], [131], [141], [142], [150], [162], [163], [173], [192], [223], [224] и [241].

В следващия параграф получените резултати са приложени към математически модел от фармакокинетиката. Моделът е взиман от [127]. Повторението е свързано с естеството на моделирания процес. От математическа гледна точка разглежданото в дисертацията моделно импулсно диференциално уравнение е различно. Така например, в дисертацията уравнението е с променливи импулсни моменти, които се определят с помощта на бариерно множество (прага), докато уравнението, изследвано в [127], е с фиксирани импулсни моменти. Проблемът, който се изследва в посочената

по-горе статия, е свързан с непрекъсната зависимост на решението при смущения в импулсните моменти. Настоящите изследвания са посветени на намирането на оптимални импулсни въздействия в смисъла на Дефиниция 3.2. от предходния параграф.

Много често, лечението на редица болестни състояния се осъществява чрез поддържането в кръвта (плазмата) на пациента на терапевтична концентрация на лекарствено средство. Терапевтичната плазмена концентрация може да се постигне по два основни начина:

- чрез непрекъснато подаване на лекарство;
- чрез прекъснато дискретно (импулсно) подаване на лекарството - през определени времеви периоди.

От гледна точка на ефективното лечение, непрекъснатото подаване на лекарствата е за предпочитане. За съжаление, този начин на лечение е затруднен при практическото му реализиране. По-точно, в общия случай е невъзможно предписаното лекарство да се подава непрекъснато в продължение на целия период на лечение на болния (този период може да е с продължителност от няколко седмици или месеци). Поради тази причина, поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството е по-често срещано. Естествено е да се предполага, че обемът на дискретно подаденото лекарствено средство (дозата) е ограничен както отдолу, така и отгоре, т.е. съществуват минимално и максимално количество от лекарството, което може да се приеме еднократно. При този тип лечение лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра:

- размер на еднократната доза на лекарството  $D_i$ ;
- дължина на дозовия интервал  $T_{i+1}$ ,  $i=1, 2, \dots$

По-прецизно горните понятия ще дефинираме както следва:

- $D_i$  е дозата (обемът на лекарственото средство) при  $i$ -тото подаване на лекарството;
- $T_{i+1}$  е дозовият интервал (времето между моментите на  $i$ -тото и  $(i+1)$ -то подаване на лекарство),  $i=1, 2, \dots$

В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, лекарственото средство започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в диапазон, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани още терапевтични граници (терапевтичен прозорец) на концентрацията на лекарството. Фармакокинетичният модел на този тип лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, гарантираща поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец.

Основната ни цел в този параграф е да оптимизираме схемата на лечение. Оптимизирането накратко се състои в следното. Нека са известни:

- количеството на лекарството, с което разполагаме за лечението на даден пациент;
- терапевтичните граници;
- минималното и максималното количество на дозата, която се подава дискретно във времето;
- законът, по който се кумулира лекарството.

Целта е да се определят последователните дози на лекарството, а също така и моментите, в които се осъществяват дискретните лекарствени интервенции, с цел терапевтичната концентрация да се поддържа максимално дълъг период от време.

Въвеждаме следните означения:

1. Организмът се представя чрез един компартимент с обем  $V_d$ , в който лекарственото средство се разпределя. Възможно е концентрацията на лекарството да е различна в различните части на организма. За удобство, по-нататък ще предполагаме, че съотношението между нивата на лекарствената концентрация във всяка част на

организма в периода на лечението е постоянно. Това означава, че всяка промяна в плазмената концентрация рефлектира в строго определена съответна количествена промяна в тъканните концентрации;

2. Началният момент на лечението означаваме с  $t_0$ ;

3. Времетраенето от началния момент на лечение  $t_0$  до първия момент  $t_1$ , в който се внася лекарствено средство с обем  $D_1$ , означаваме с  $T_1$ , т.е. изпълнено е  $t_1 = t_0 + T_1$ ;

4. Поредната доза  $D_i$  от лекарственото средство се внася директно в компартимента в момента

$$t_i = t_{i-1} + T_i = t_0 + \sum_{j=1}^i T_j, \quad i=1, 2, \dots;$$

5. Елиминирането на лекарството протича със скорост, която е пропорционална на моментното му количество в организма, т.е. разглежда се като процес от първи порядък, характеризиращ се със скоростна константа  $K$ . Последната константа е сума от константата на метаболизиране  $K_m$  и константата на екстракция на непромененото лекарство  $K_e$ . Валидно е равенството  $K = K_m + K_e$ ;

6. Означаваме с  $A(t)$  количеството лекарствено средство в организма на пациента в момента  $t \geq t_0$ . В общия случай, количеството на това вещество, което се намира в цялото тяло на пациента в произволен момент, не може да бъде определено експериментално. В действителност се определя концентрацията на лекарственото средство в някои от биологичните течности (най-често в кръвта). За математическото моделиране на процеса на лечението е удобно да се въведе обемът, в който се разпределя лекарственото средство. Тази величина, наречена обем на разпределение,

означаваме с  $V_d$  и е дефинирана така, че е изпълнено равенството  $C(t) = \frac{A(t)}{V_d}$ ,  $t \geq t_0$ ,

където  $C(t)$  е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта или по-общо в плазмата. Ще отбележим, че обемът на разпределение няма физиологичен смисъл. Можем да считаме, че това е фиктивен обем, в който, ако се разпредели равномерно лекарството в количество  $A(t)$ , то ще е в концентрация  $C(t)$ , измерена в плазмата. В действителност част от лекарството се свързва с плазмените и тъканните протеини, поради което неговото разпределение не е равномерно. Поради тази причина, обемът на разпределение е възможно да е различен от обема на телесните течности;

7. Долната и горната граници на терапевтичната концентрация на лекарственото средство означаваме съответно с  $C^{\min}$  и  $C^{\max}$ . С други думи, ако концентрацията на лекарството е между  $C^{\min}$  и  $C^{\max}$ , то провежданото лечение има полезно въздействие върху пациента. Ще обърнем внимание на факта, че границите на терапевтичната концентрация е възможно да се променят с времето, т.е. възможно е  $C^{\min} = C^{\min}(t)$  и  $C^{\max} = C^{\max}(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Промените в терапевтичните граници отрязват благоприятното развитие на болестта и необходимата съответна концентрация на лекарственото средство за преодоляването ѝ;

8. Както в предходния параграф с помощта на константите  $C^{\min}$  и  $C^{\max}$  ще определим съответно долна и горна бариерни прави:

$$\Phi^{\min} = \{(t, C); t \in \mathbb{R}^+, C = C^{\min}\}, \quad \Phi^{\max} = \{(t, C); t \in \mathbb{R}^+, C = C^{\max}\};$$

9. В началния момент  $t_0$  ще предполагаме, че лекарствената концентрация е  $C_0$ ,  $C^{\min} < C_0 < C^{\max}$ ;

10. Тъй като във времето концентрацията на лекарственото средство намалява, то е ясно, че горната бариерна права е недостижима от интегралната крива  $(t, C(t))$ , описваща динамиката на развитие на концентрацията;

11. Интуитивно е ясно, че оптималните импулсни интервенции на лекарствено средство ще се осъществяват в моментите, в които интегралната крива  $(t, C(t))$  пресече долната бариерна права;

12. Ясно е, че еднократните дози на лекарството трябва да удовлетворяват неравенствата:

$$C^{\min} + \frac{D_i}{V_d} \leq C^{\max} \Leftrightarrow D_i \leq V_d (C^{\max} - C^{\min}), \quad i=1, 2, \dots$$

13. От друга страна, техническите средства, чрез които се осъществяват практически дискретните лекарствени интервенции, ограничават отдолу еднократната доза, т.е.

$$(\exists D^{\min} = \text{const} > 0): D_i \geq D^{\min}, \quad i=1, 2, \dots$$

Математическият модел на идеализирания по-горе фармакокинетичен процес се описва с помощта на следната начална задача за импулсни диференциални уравнения:

$$(3.39) \quad \frac{dC}{dt} = -KC, \quad C(t) > C^{\min}, \quad t_{i-1} < t \leq t_i,$$

$$(3.40) \quad C(t_i) = C^{\min}, \quad i=1, 2, \dots,$$

$$(3.41) \quad C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d} = C^{\min} + \frac{D_i}{V_d},$$

$$(3.42) \quad C(t_0) = C_0.$$

Получените твърдения в предходния параграф са валидни за разглеждания математически модел. Ще се спрем на Забележка 3.3 и намирането на оптималното решение:

1. Броят на дозите получаваме по формулата

$$n_{opt} = \left\lceil \frac{D_{\Sigma}}{D^{\min}} \right\rceil = \text{"цялата част на числото } \frac{D_{\Sigma}}{D^{\min}} \text{"};$$

2. Оптималните дози са в обем:

$$D_1 = D_2 = \dots = D_{n_{opt}} = D^{opt} = \frac{D_{\Sigma}}{n_{opt}}.$$

Оптималното решение  $C^{opt}(t)$  на горната начална задача (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) се получава сравнително тривиално:

- При  $t_0 \leq t \leq t_1$  е изпълнено

$$C^{opt}(t) = C_0 \exp(-K(t - t_0));$$

- При  $t = t_1$  от горното равенство имаме

$$C_0 \exp(-K(t_1 - t_0)) = C^{\min},$$

откъдето намираме

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{K} \ln \frac{C_0}{C^{\min}}.$$

- При  $t_1 < t \leq t_2$  е изпълнено

$$C^{opt}(t) = \left( C(t_1) + \frac{D_1}{V_d} \right) \exp(-K(t - t_1)) = \left( C^{\min} + \frac{D^{opt}}{V_d} \right) \exp(-K(t - t_1)).$$

- При  $t = t_2$  намираме

$$C^{\min} = \left( C^{\min} + \frac{D^{opt}}{V_d} \right) \exp(-K(t_2 - t_1)),$$

откъдето достигаме до извода, че

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{K} \ln \left( 1 + \frac{D^{opt}}{V_d C^{\min}} \right).$$

По индукция получаваме равенствата:

$$C^{opt}(t) = \left( C^{\min} + \frac{D^{opt}}{V_d} \right) \exp(-K(t - t_i)), \quad t_i < t \leq t_{i+1};$$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{1}{K} \ln \left( 1 + \frac{D^{opt}}{V_d C^{\min}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n_{opt}.$$

Накрая, установяваме, че максималното време  $t^{\max}$  за поддържане на терапевтичната концентрация при наличен лекарствен ресурс в обем  $D_{\Sigma}$  е

$$t^{\max} = t_{n_{opt}+1} = t_0 + \frac{1}{K} \ln \frac{C_0}{C^{\min}} + \frac{1}{K} \left[ \frac{D_{\Sigma}}{D^{\min}} \right] \ln \left( 1 + \frac{D_{\Sigma}}{\left[ \frac{D_{\Sigma}}{D^{\min}} \right] V_d C^{\min}} \right).$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертационния труд са получени следните по-важни резултати:

1. Въведено е понятието загиване на решения на диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Намерени са достатъчни условия, при които решенията на такива уравнения прекратяват своето съществуване заради наличието на импулсни въздействия. Отделно са изследвани случаите, когато превключващите функции (чрез които се определят импулсните моменти) са линейни или нелинейни.
2. Въведени са понятията непрекъсната зависимост относно превключващите функции и импулсните въздействия на загиващи решения (по причина на импулсните въздействия) на диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Намерени са достатъчни условия, при които решенията притежават посочените качества. Изследвани са случаите на линейни и нелинейни превключващи функции.
3. Въведени са и са изследвани понятията бариерна права, фазова полуравнина, оптимални импулсни въздействия, оптимално решение и др. Тези понятия са свързани с качествата на решенията на диференциални уравнения с импулси, при които моментите на въздействие се определят чрез бариерно множество, разположено в разширеното фазово пространство. Оптималните качества на въздействията, когато сумата им е предварително фиксирана, се отнасят за максимална по време принадлежност на съответното им решение към фазовата полуравнина.
4. Изучен е импулсен модел от фармакокинетиката, описващ терапевтичната концентрация на лекарство, което се подава дискретно във времето. При ограничен фиксиран обем на наличното лекарство са определени моментите и дозите на неговите дискретни подавания така, че времетраенето на терапевтичната концентрация в организма да е с максимална продължителност.

### ДЕКЛАРАЦИЯ

1. Резултатите и сведенията от увода са предварителни и се основават на различни литературни източници, които са надлежно посочени.

2. Резултати от параграфите с номера: 1.1; 1.2 и 2.1 са публикувани в три научни статии. Във всяка една от тях участва като автор С. Петкова. Списъкът на тези публикации е даден отделно.
3. Резултатите в останалите три параграфа са нови и се публикуват за първи път тук.

## СПИСЪК

на публикации по дисертационния труд

1. Dishlieva K., Dishliev A., Petkova S., Death of the solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, International Journal of Differential Equations and Applications, Vol. 11, Issue 3, (2012), 169-181.
2. Petkova S., "Death" of the solutions of differential equations with variable structure and impulses, Proceeding of Jubilee national scientific conference with international participation "Traditions, Directions, Challenges", Smolyan, (2013), (to appear).
3. Dishlieva K., Girginov C., Petkova S., Continuous dependence of the final moment of existence for solutions of differential equations, J. of the University of Chemical Technology and Metallurgy, 47, 5, (2012), 574-581.

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпуного к дифференциальным уравнениям с неоднозначной правыми частями, Автоматика и телемеханика, (1961), Том 22, № 7, 817-830.
2. Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).
3. Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).
4. Баутин Н., Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Труды ICNO V, АН УССР, Киев, (1963), Том 2, 29-54.
5. Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процессов при неперерывных и дискретных возмущениях, Научная думка, Москва, (1988).
6. Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсными воздействием, Укр. мат. журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.
7. Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсными воздействием, Дифференц. уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.
8. Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействием, Докл. АН Укр. ССР, (1982), Сер. А, Том 10, 11-14.
9. Завалишин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. кн. изд-во, Свердловск, (1983).
10. Завалишин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).
11. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударные импульсом, Дифференц. уравнения, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.
12. Калигин Б., О колебаниях маятника с ударные импульсом, часть 2, Дифференц. уравнения, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.
13. Калигин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, Дифференц. уравнения, (1971), Том 7, № 3, 540-542.
14. Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Весці НАН Беларусі, (2003), Том 2, 59-65.
15. Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Дифференц. уравнения, (2004), Том 40, № 3, 310-323.
16. Кобринский А. Е., Кобринский А. А., Выбросовые системы, Наука, Москва, (1973).
17. Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Дифференц. уравнения, (1974), Том 10, № 7, 1264-1275.
18. Крылов Н., Боголюбов Н., Введение в нелинейную механику, Изд. УССР, Киев, (1937).
19. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, Дифференц. уравнения, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
20. Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, Дифференц. уравнения, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
21. Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, Сиб. мат. журнал, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
22. Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УССР, (1963), 64-81.
23. Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, Институт математики НАН Украины, Киев, (2007).
24. Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных включений и импульсных задач управления, Кибернетика и системный анализ, (2002), Том 5, 71-85.

25. Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, *Укр. мат. журнал*, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
26. Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, *Укр. мат. журнал*, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
27. Попов Е., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, Москва, (1964).
28. Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, *Дифференц. уравнения*, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
29. Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Дифференц. уравнения*, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
30. Самойленко А., Перестюк Н., *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев, (1987).
31. Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсным воздействием, *Укр. мат. журнал*, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
32. Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема "биений" в импульсных системах, *Институт математики АН УССР, Киев*, (1990).
33. Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, *Укр. мат. журнал*, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
34. Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, "ФАН", Узбекской ССР, Ташкент, (1971).
35. Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, *Дифференц. уравнения*, (1979), Том 15, № 10, 1814-1823.
36. Филиппов А., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, Москва, (1985).
37. Халанай А., Векслер Д., *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва, (1971).
38. Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, *ДАН СССР*, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
39. Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., *Управление колебаниями*, Наука, Москва, (1980).
40. Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, *Equations Mathematicae*, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.
41. Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, *Applied Mathematics and Computation*, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.
42. Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.
43. Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.
44. Ahmad B., Sivasundaram S., Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.
45. Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.
46. Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 290, № 2, 436-451.
47. Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.
48. Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 3, 786-795.
49. Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.
50. Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous system, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.
51. Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, *Ukrainian Math. J.*, (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.
52. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *Computers & Mathematics with Applications*, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.
53. Angelova J., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.
54. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 39, № 4, (2000), 483-497.
55. Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in population dynamics, *Applicable Analysis*, (1999), Vol. 69, № 3&4, 207-221.
56. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 193, 923-941.
57. Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008), Article ID 752403, 18 p.
58. Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, *Biomedical Engineering*, (1991), Vol. 38, № 6, 522-525.

59. Bainov D., Covachev V., *Impulsive differential equations with a small parameter*, World Scientific, Singapore, (1994).
60. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations*, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.
61. Bainov D., Covachev V., Stamova I., *Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.
62. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument*, *Kodai Math. J.*, (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.
63. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument*, *Aplicable Analysis*, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.
64. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument*, *J. of Applied Analysis*, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.
65. Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., *Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument*, *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.
66. Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., *Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument*, *Georgian Math. J.*, (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.
67. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.
68. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations*, *Multivariate Approximation and Splines*, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.
69. Bainov D., Dishliev A., Hristova S., *The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations*, *Indian J. pure Appl. Math.*, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.
70. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamic control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Math. Model. Numer. Anal.*, (1990), Vol. 24, № 6, 681-692.
71. Bainov D., Dishliev A., *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population*, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences*, (1989), Tome 42, № 12, 29- 32.
72. Bainov D., Dishliev A., Stamov G., *Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations*, *Kumamoto J. Math.*, (1997), Vol. 10, 1-10.
73. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations*, *Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII-Sc. Mat.*, (1995), Vol. 41, 45-54.
74. Bainov D., Dishliev A., Stamova I., *Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics*, *ANZIAM J.*, (2002), Vol. 43, 525-539.
75. Bainov D., Dishliev A., *Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses*, *International J. Systems Sci.*, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.
76. Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., *Partial averaging for impulsive differential equations with supremum*, *Georgian Math. J.*, (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.
77. Bainov D., Hristova S., *Differential equations with maxima*, *Pure and Applied Mathematics*, Chapman & Hall/CRC, New York, (2011).
78. Bainov D., Kolev D., Nakagawa K., *The control of the blowing-up time for the solution of the semilinear parabolic equation with impulsive effect*, *J. Korean Math. Soc.*, (2000), Vol. 37, № 5, 793-802.
79. Bainov D., Kostadinov S., Minh N., *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations*, *Science Culture Technology Publishing*, (1994).
80. Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., *Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations*, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
81. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P.,  $L_p$ -equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (1992), Vol. 36, 17-33.
82. Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., *Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space*, *International J. of Theoretical Physics*, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
83. Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., *Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
84. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations*, *SUT J. of Math.*, (1995), Vol. 1, 55-71.
85. Bainov D., Kulev G., Stamova I., *Instability of solutions of impulsive systems of differential equations*, *International J. of Theoretical Physics*, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
86. Bainov D., Markova N., Simeonov P., *Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions*, *J. of Computational and Applied Math.*, (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.

87. Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1983), Vol. 95, № 1, 85-105.
88. Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, (1981), Vol. 32, 237-254.
89. Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, *Nonlinear Word*, (1996), Vol. 3, 357-384.
90. Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations*, (1994), 31-34.
91. Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima", *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
92. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, (1995).
93. Bainov D., Simeonov P., *Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
94. Bainov D., Simeonov P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
95. Bainov D., Simeonov P., *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, FL, (1998).
96. Bainov D., Simeonov P., *System with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
97. Ballinger G., Liu X., Permanence of population growth model with impulsive effects, *Mathematics and Computer Modeling*, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
98. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive differential equations and inclusions*, Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
99. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., *Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces*, *Applicable Analysis*, (2001), Vol. 80, № 3, 353-365.
100. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1665.
101. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., *Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay*, *International J. of Applied Math. Sciences*, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
102. Benchohra M., Ouahab A., *Impulsive neutral functional differential equations with variable times*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
103. Berezhansky L., Braverman E., On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications, *J. of Differential Equations and Applications*, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
104. Braverman E., Mamdani R., Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment, *J. of Mathematical Biology*, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
105. Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems, *Nonlinear Analysis*, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
106. Chen G., Shen J., Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, Ser. A, (2007), Vol. 14, 177-188.
107. Chen J., Tisdell C., Yuan R., On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
108. Chen S., Qi J., Jin M., Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments, *Computers & Mathematics with Applications*, (2003), Vol. 46, № 8-9, 1281-1287.
109. Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
110. Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
111. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses with respect to the switching functions, *International J. of Applied Science and Technology*, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
112. Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions, *International J. of Differential Equations and Applications*, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
113. Chukleva R., Modeling using differential equations with variable structure and impulses, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
114. Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
115. Cordova-Lepe F., Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics, *Biomat 2006*, International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
116. D'Onofrio A., Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model, *Mathematical Biosciences*, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.

117. Dai B., Su H., Hu D., Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
118. Dimov H., Nenov S., Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems, *Extracta Mathematicae*, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
119. Dishliev A., Bainov D., Conditions for the absence of the phenomenon "beating" for systems of impulse differential equations, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
120. Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
121. Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1990), Vol. 29, № 6, 655-675.
122. Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
123. Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of "beating" in systems of differential equations with impulses, *Aplicable Analysis*, (1984), Vol. 18, № 1&2, 67-73.
124. Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
125. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right-hand side, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
126. Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications, *Academic Publications, Ltd.* (2011).
127. Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, *International J. of Pure and Applied Mathematics*, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
128. Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, *Acta Mathematica Scientia*, (2012), Vol. 32, № 3, 1035-1052.
129. Dishlieva K., Differentiability of solutions of impulsive differential equations with respect to the impulsive perturbations, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications*, (2011), Vol. 12, № 6, 3541-3551.
130. Dong L., Chen L., Shi P., Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition system with diffusion and impulses, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 32, № 5, 1916-1926.
131. Dong L., Chen L., Sun L., Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 2, 572-578.
132. Elaydi S., Yakubu A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. Diff. Equations Appl.*, (2002), Vol. 8, № 6, 537-549.
133. Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, *The J. of Australian Math. Society. Series B. Applied Mathematics*, (1991), Vol. 32, 382-400.
134. Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
135. Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 38, № 3, 307-325.
136. Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.
137. Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
138. Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
139. Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
140. Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, *Mathematics and Computer Modeling*, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
141. Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
142. Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, *J. Biotechnol.*, (2007), Article ID 64870.
143. Georgieva A., Kostadinov S.,  $L_p$ -equivalence of impulsive differential equations, *SUT J. of Mathematics*, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
144. Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the  $L_p$ -equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, *Turkish J. of Mathematics*, (2008), Vol. 32, 451-466.
145. Georgiou D., Nieto J., Rodríguez-López R., Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, (2005), Vol. 63, № 4, 587-600.
146. Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, *International Applied Mechanics*, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
147. Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.

148. Gopalsamy K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
149. Gopalsamy K., Zhang B., *On delay differential equations with impulses*, *J. Math. Analysis and Applications*, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
150. Guo H., Chen L., *Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
151. Hartman F., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
152. Henderson J., Thompson H., *Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II*, *Math and Computer Modeling*, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
153. Hristova S., Bainov D., *Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations*, *Rocky Mountain J. Math.*, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
154. Hristova S., Kulev G., *Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations*, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
155. Hristova S., *Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications*, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
156. Hristova S., Roberts L., *Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations*, *Mathematical and Computer Modelling*, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
157. Huo H-F., *Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses*, *Computers & Mathematics with Applications*, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
158. Ignatyev A., *On the stability of invariant sets of systems with impulse effect*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
159. Jia J., Li C., *A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey*, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
160. Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., *Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey*, *Applied Mathematics and Mechanics*, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
161. Jin Z., Zhien M., Maoan H., *The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive*, *Chaos Solitons & Fractals*, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
162. Juang G., Lu Q., *Impulsive state feedback control of a predator-prey model*, *J. of Computational and Applied Mathematics*, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
163. Juang G., Lu Q., *The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
164. Karandjulov L., Stoyanova Y., *Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems*, *Univ. Mishcolc Inst. Mathematical Notes*, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
165. Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., *Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator*, *Rostock. Math. Kolloq.*, (1999), Vol. 53, 51-59.
166. Kulev G., Bainov D., *Global stability of sets for systems with impulses*, *Applied Mathematics and Computation*, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
167. Kulev G., Bainov D., *On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods*, *Dynamics and stability of systems*, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
168. Kulev G., Bainov D., *Stability of sets for systems with impulses*, *Tamkang J. of Math.*, (1988), Vol. 19, № 2, 13-22.
169. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
170. Lakshmikantham V., Liu X., *Stability for impulsive differential systems in terms of two measures*, *Applied Mathematics and Computations*, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
171. Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., *Hybrid systems with time scales and impulses*, *Nonlinear Analysis*, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
172. Li J., Nieto J., *Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
173. Lin D., Hui J., *The best dosage scheme on multiple rapid vein injection*, *J. of Biological Systems*, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
174. Liu B., Teng Z., Liu W., *Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations*, *Chaos Solitons & Fractals*, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
175. Liu B., Zhang Y., Chen L., *The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2005), Vol. 6, № 2, 227-243.
176. Liu L., Ye Y., *Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses*, *International J. of Computational and Math. Sciences*, (2011), Vol. 5, № 4, 229-235.
177. Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., *Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
178. Liu X., Chen L., *Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator*, *Chaos Solitons & Fractals*, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
179. Liu X., Chen L., *Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations*, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.

180. Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator–prey system with time delay and impulse, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
181. Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, *Dyn. Stabil. Syst.*, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
182. Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, *Applied Mathematics Letters*, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
183. Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.
184. Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, *International J. of Biomathematics*, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
185. Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
186. Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, *J. of Mathematical Chemistry*, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
187. Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, *International J. of Theoretical Physics*, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
188. Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
189. Milev N., Bainov D., Stability of linear impulsive differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
190. Naulin R., Pinto M., Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
191. Nenov S., Bainov D., Impulsive dynamical systems, *Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations*, (1992), 145-166.
192. Nenov S., Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics, *Nonlinear Analysis*, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
193. Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects, *J. of Computational and Applied Math.*, (2009), Vol. 224, № 2, 544-555.
194. Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator, *BioSystems*, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
195. Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
196. Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
197. Nieto J., Rodrigues-Lopez R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. *Computers & Mathematics with Applications*, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
198. Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
199. Nieto J., The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy sets and systems*, (1999), Vol. 102, № 1, 159-262.
200. Pandit S., Deo S., *Differential systems involving impulses*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
201. Perestyuk M., Chernikova O., Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations, *Ukrainian Math. J.*, (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
202. Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., Method of averaging for impulsive differential inclusions, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, (1998), Vol. 12, 43-55.
203. Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, *J. Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 207, № 2, 300-315.
204. Saito Y., The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition systems with delays, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2002), Vol. 268, № 1, 109-124.
205. Samojlenko A., Perestyuk N., *Impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, (1995).
206. Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.
207. Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, *Tamkang J. Math.*, (1991), Vol. 22, № 3, 275-284.
208. Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.
209. Simeonov P., Bainov D., Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations, *Chinese J. of Math.*, (1993), Vol. 1, 73-80.
210. Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, *Bulletin of Math. Biology*, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.
211. Stamov G., *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).
212. Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, *Applied Math. Modeling*, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.

213. Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.
214. Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), *Bulletin of the Australian Math. Society*, (2008), Vol. 77, 331-345.
215. Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, *International J. of Applied Math.*, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.
216. Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, *Communications in Applied Analysis*, (2006), Vol. 10, 285-291.
217. Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, *J. of Dynamical and Control Systems*, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.
218. Stamova I., *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).
219. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, *Electronic J. of Differential Equations*, (2008), Vol. 48, 1-10.
220. Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, *J. of Computational and Applied Math.*, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.
221. Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.
222. Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, *Applied Mathematics and Computation*, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.
223. Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, *J. of Computational and Applied Math.*, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
224. Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.
225. Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
226. Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, *Applied Math. Modeling*, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
227. Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
228. Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
229. Xian X., O'Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, *Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems*, (2008), Vol. 2008, Article ID 197205.
230. Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, *Mathematics and Computer Modeling*, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
231. Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
232. Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, (2005), Vol. 52, 517-521.
233. Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential  $p$ -stability of impulsive stochastic differential equations with delays, *Physics Letters A*, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
234. Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, *International J. of Theoretical Physics*, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
235. Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, *J. of Math. Analysis and Applications*, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
236. Zavalishchin S., Seseikin A., *Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
237. Zeeman E., Zeeman M., From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems, *Transactions of the American Math. Society*, (2002), Vol. 355, № 2, 713-734.
238. Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, *Advances in Complex Systems*, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
239. Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
240. Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, *Mathematical and Computer Modelling*, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
241. Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
242. Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. of Math. Analysis and Applications*, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
243. Zhao Z., Jiang J., Lazer A., The permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2004), Vol. 5, № 2, 265-276.