РЕЗЮМЕТА

на основните резултати и научните приноси, в трудовете на доц. д-р Ангел Дишлиев, катедра Математика, ХТМУ – София, представени за участие в конкурс за заемане на академичната длъжност "професор" за нуждите на ХТМУ – София, по научно направление 4.5. Математика, научна специалност Диференциални уравнения

А. Монография

1. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Nenov S. I., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications, Academic Publications, Ltd. (2011).

Монографичният труд е посветен на някои специфични свойства на решенията на системи нелинейни диференциални уравнения с импулси. Разглежданите въпроси се отнасят към качествената теория и приложенията на тези уравнения при изследване на различни математически модели. Този клас уравнения е удобен математически апарат за моделиране на процеси и явления, които по време на своето развитие са подложени на кратковременни външни въздействия. Предполага се, че времетраенето на въздействията е "пренебрежимо малко" в сравнение с общата продължителност на процесите или явленията, които импулсните уравнения описват. Поради това може да се приеме, че въздействията са "мигновени" и се извършват под формата на импулси. Решенията на съответните начални задачи са частично непрекъснати функции с точки на прекъсване от първи род, в които е прието решенията да са непрекъснати отляво.

Изследването на импулсните диференциални уравнения има специфични особености (и произтичащи от тях трудности при изучаването им), а именно:
- Прекъснатост на решенията: Ще отбележим, че точките на прекъсване са от първи род, т.е. "импулсният скок" е ограничен. Решенията са непрекъснати отляво във всяка точка от максималния интервал на съществуване;
- Наличие на ефекта "биене": В този случай, интегралната крива или траекторията на уравнението среща многократно (възможно е и безбройно много пъти) импулсното множество. При това обстоятелство има шанс да се достигне до ситуация, при която импулсните моменти притежават точка на сгъстяване. В този случай решението не е продължимо надясно от тази точка на сгъстяване или както е прието да се казва решението "загива". Изрично ще отбележим, че в общия случай при наличие на явлението "биене" е невъзможно да се изучават редица качествени свойства на решенията на този тип уравнения, като: непрекъсната зависимост, периодичност, устойчивост и др.;
- Загуба на свойството автономност: Качеството "автономност" по принцип се отнася за решенията на системи диференциални уравнения с импулси, за които десните страни не зависят от времето. Много често при уравненията с променливи импулсни моменти (включително, когато десните страни не зависят от времето), тези импулсни моменти се получават като решения на уравнения, в които като аргумент участва и решението. Тъй като решението е функция на времето се оказва, че импулсните моменти са също функция от времето, включително зависят и от началния момент. Това означава, че в крайна сметка решението на задачата с импулси (което зависи от импулсните моменти) е съставна функция, зависеща и от началния момент, т.е. то не е автономно;

- Сливане на решения: Обикновено, сливането се осъществява след импулсно въздействие върху поне едно от решенията;
- Промяна на импулсните моменти: Тази промяна в повечето от случаите, разгледани в монографията, се дължи на изменения на началното условие. Оказва се, че в общия случай различни решения на едно и също импулсно уравнение (разбира се с начални условия, които не съвпадат) имат различни импулсни моменти. Включително, при едно от тези решения е възможно да липсват импулси. Нещо повече, при смущения само на началното условие е възможно освен различия в импулсните моменти, решенията на изходната и смутената задача да са подложени на различни импулсни въздействия. Различията може да са както в големината, така и в посоките на съответните импулсни въздействия;
- Промяна на импулсните моменти при смущаване на системата: Както е известно, смущенията на системата може да се състоят в промяна на дясната страна, в промяна на параметри, участяващи в уравненията, в промяна на импулсните функции и др. Решението на изследваната задача и съответното решение на смутената задача (при едни и същи начални условия) в общия случай имат различни импулсни моменти и различни по големина и посока импулсни въздействия;
- Натрупване на грешки: Пертурбациите и неточностите при импулсните въздействия се "натрупват" във времето и оказват съществено влияние при определяне поведението на решението. В много случаи, тези пертурбации могат да имат непреодолим характер и да доведат до формирането на решения, които се различават съществено (а в отделни случаи неограничено) от изучаваното "не пертурбирано" решение. Това обстоятелство много често се дължи на безбройно многото на брой импулсни въздействия, които се осъществяват в неограничено множество от импулсни моменти, т.е. ако $t_i,\ i=1,2,\ldots$, са импулсните моменти, то е възможно $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$.

Основните трудности при изучаването на асимптотичните свойства и качествата на решенията на диференциалните уравнения с импулси, в случаите, в които смущенията са в импулсните множества (в частност в импулсните моменти) или в големините или посоките на импулсните въздействия, се дължат на факта, че смущенията са многократни (в общия случай безбройно много). Възможно е моментите, в които се случват импулсните смущения, да са неограничени във времето, което означава, че външните пертурбации не "изчезват" и не "затихват" при произволно дълго отдалечаване от началния момент.

Изследванията в монографията са посветени на специфични и характерни само за импулсните уравнения непрекъснати зависимости, диференцируемости и устойчивости на решенията. Ще посочим някои от тях:
- Непрекъсната зависимост относно импулсните моменти;
- Непрекъсната зависимост относно бариерните функции;
- Непрекъсната зависимост относно импулсните въздействия;
- Непрекъсната зависимост относно импулсните хиперповърхнини;
- Непрекъсната зависимост относно превключващите и импулсни множества;
- Орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост по отношение на началното условие и импулсните смущения;
- Диференцируемост относно импулсните функции;
- Орбитална Хаусдорфова устойчивост относно началното условие;
- Равномерна устойчивост относно началното условие и импулсните въздействия;

В по-голямата част от разглежданите уравнения, смущенията са в импулсните множества (в частност импулсните моменти) или в големините на импулсните функции (големините на импулсните "скокове").

Като правило, всеки от получените резултати е приложен върху известен математически модел от популационната динамика, фармакокинетиката, хидродинамиката и др. Получените асимптотични качества на решенията са интерпретирани в термините на съответния модел.

Част от изследванията са насочени към оптимизационни задачи от популационната динамика. Така например е разгледана динамиката на развитие на биомасата на изолирана популация, чието развитие е подчинено на закона на Verhulst. Моментите и количествата на импулсните отнемания от биомасата на популацията са определят така, че времето за възпроизводство на отнетата биомаса да е минимално. Описан е оптимален режим на възпроизводство на изваденото (оползотвореното) количество биомаса.

Друга важна тема, обект на изследване в монографията, обхваща клас от оптимизационни задачи, при които оптимизацията се осъществява чрез импулсно управление. Намерени са необходими и достатъчни условия за съществуване на оптимално импулсно управление на начални задачи за динамични системи. Резултатите са приложени към импулсни модели на Verhulst и Gompertz, описващи динамиката на изолирани популации.

Б. Статии

Б1. Тема: Фундаментална и качествена теория на обикновени диференциални уравнения

2. Bainov D. D., Dishliev A. B., Hristova S. G., An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations, Coptes rendus de l'Academie bulgare des sciences, (1997), Tome 50, n. 11-12, 21-22.

Основната цел, поставена и постигната в статията, е доказването на съществуване и приблизително намиране на решението на периодична задача за нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения (без импулси). Един от основните съвременни подходи за постигане на тази цел е конструирането на монотонни редици от гладки функции, които са сходящи към решението на периодичната задача. Ако сходимостта на редицата е равномерна, то е естествено да се счита, че всеки неин елемент с "достатъчно голям" номер е приблизително аналитично решение на разглежданата задача. От практическа гледна точка е важно, редицата да е сравнително "бързо" сходяща към решението. В работата са съчетани идеите на метода на квазилинеаризацията на R. Bellman и на метода на монотонно-итеративната техника (известен още като метод на долните и горните решения) на V. Lakshmikantham. В работата е представен конструктивен алгоритъм за намиране на сходяща редица към решението на периодичната задача. Показано е, че "скоростта" на сходимост на редицата е квадратична.

3. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Continuous dependence of the solutions of differential equations under "short" perturbations on the right–hand side, Communications in Applied Analysis, (2006), Vol. 10, n. 2, 149-159.

В статията се въвежда и изучава специфична непрекъсната зависимост на решенията на начална задача за нелинейни неавтономни системи от диференциални уравнения. Смущенията са свързани с дясната страна на системата от уравнения. По-точно, десните страни на изходната система и съответната й смутена система съвпадат почти навсякъде в ограничен дефиниционен времеви интервал с дължина (мярка) H. Различия в десните страни се допуска само в моментите, принадлежащи на измеримо времево подмножество на дефиниционния интервал с мярка h, където са валидни неравенствата $0<h<H$. В множеството, допускащо смущения, се предполага, че дясната страна на смутената система е Липшицова с константа на Lipschitz от порядъка на h^{-2}. Това означава, че разликите между десните страни на изходната система и съответната й смутена система могат да растат неограничено със скорост $O\left(h^{-2}\right)$ в множество с мярка h (при $h\to 0$). При класическите теореми за непрекъсната зависимост (при постоянно действащи смущения) се изисква "близост" между десните страни, която е равномерна през целия времеви интервал на съществуване на решенията. Тук се изисква съвпадение между десните страни, с изключение на измеримо множество с мярка h. Разликите между десните страни в това множество са "контролируемо големи" (поради липшицовост на дясната страна на смутената задача). Същевременно (и това е новото в изследванията) разликите между същите десните страни е възможно да растат неограничено при $h\to 0$.

Научните приноси се състоят в намирането на достатъчни условия за произволна близост на решенията на основната и смутена системи в ограничен времеви интервал с дължина H при наличие на описаните по-горе смущения.

Резултатите от работата са приложени върху класическия модел на Schmalhausen, който разглежда динамиката на нарастването на биомасата на специфични кълбовидни бактерии. Показано е, че при определен клас смущения на закона на развитие, решенията са h-непрекъснато зависими.

4. Dishliev A. B., Hristova S. G., Stability on cone in terms of two measures for differential equations with "maxima", Annals of Functional Analysis, (2010), Vol. 1, n. 1, 133-143.

Един от важните недостатъци на втория метод на Ляпунов е липсата на общ алгоритъм за намиране на конкретните функции (наричани още функции на Ляпунов), чрез които се реализира метода. Нещо повече, за сега не е проучен достатъчно въпросът за отсъствието на такива функции, т.е. няма категоричен отговор в кои случаи диференциалните уравнения не притежават устойчиви решения, което означава, че липсват функции на Ляпунов за тях. Един възможен изход е конструирането на векторни функции на Ляпунов, което се оказва в много случаи сравнително по-лесна задача. При този тип функции се налага намирането на подходящи критериални диференциални уравнения, чийто решения се сравняват с решенията на разглежданата система. Възможно е фазовите пространства на двете сравнявани системи да принадлежат на различни по размерност (или още по-общо, различни топологични) обхващащи пространства. Това неминуемо налага използването на различни разстояния (мерки). В тези случаи са създадени (V. Lakshmikantham и др.) специални типове устойчивост, комбиниращи идеята за използване на две различни мерки.

В работата се изучава специална устойчивост в термините на две мерки за диференциални уравнения с "максимуми". Този сравнително нов клас диференциални уравнения се характеризира с наличието на "нетрадиционен" аргумент в дясната страна на системата. По-точно, дясната страна зависи от максималната стойност на решението, пресметната в предварителен относно текущия момент времеви интервал. Ще отбележа, че миналата година беше публикувана и първата монография, посветена на качествената теория на този тип уравнения, с автори известните български учени проф. Д. Байнов и проф. С. Христова.

Въведеният тип устойчивост е обобщение на няколко известни и проучени в научната литература устойчивости на решенията на нелинейни диференциални уравнения. Посочени са достатъчни условия, при които решенията притежават разглежданата устойчивост. Резултатите са получени с помощта на специален клас функции на Ляпунов. Предложените изследвания се базират на техниката на Разумихин в съчетание с метода на сравняването. Използваната система за сравнение е едномерна, т.е. в случая имаме критериално диференциално уравнение (а не система). Последното обстоятелство облекчава приложенията на метода.

Б2. Тема: Сравняване на устойчивости на решения на обикновени диференциални уравнения

5. Angelova J. A., Dishliev A. B., Nenov S. I., On a method of comparison of stable solutions ODE, Invited Lectures delivered at VII-th International Colloquium on Differential Equations, 18 – 23 August 1996, Plovdiv, Bulgaria, Editor: A. Dishliev, Academic Publications, Vol. II, (1996), 13-27.

В работата за първи път се въвежда понятието сравняване на устойчивости (асимптотически устойчивости) на решенията на две системи диференциални уранения. Ще се спрем по-подробно на разглежданията върху асимптотическа устойчивост. Ще казваме, че асимптотически устойчивото нулево решение на дадена система е от по-висок ранг относно устойчивото (асимптотически устойчивото) нулево решение на друга система диференциални уравнения, ако смутеното (относно началото) ненулево решение на първата система клони към нула сравнително "по-бързо" от съответно ненулево решение на втората система. В този случай ще казваме, че първата система предхожда втората. Също така, се използва терминът: "втората система диференциални уравнения следва първата". Ще казваме, че две системи диференциални уравнения са еквивалентни, ако всяка една от тях предхожда другата. Разбира се в споменатата категоризация е желателно да се запази естествената наредба на решенията: "асимптотически устойчиво – устойчиво – неустойчиво". По-точно, ако първата система диференциални уравнения притежава асимптотически устойчиво нулево решение, а втората има устойчиво (но не асимптотически устойчиво) нулево решение, то ще казваме, че първата система предхожда втората. Аналогично, ако първата система притежава устойчиво нулево решение, а втората система има неустойчиво нулево решение, то е естествено да се казва, че първата система предхожда втората или втората система следва първата.

В работата е демонстрирана полезността на въведената и описана по-горе релация на частична наредба. Доказани са различни качества на решенията на дадени изследвани системи на базата на сравняването им с фиксирани отнапред качествено установени критериални системи.

Реализирана е следната полезна схема за сравняване на решения. За всяка една от сравняваните системи е намерена еквивалентна "скаларна система". Получените скаларни системи се сравняват (по принцип се предполага, че последното сравнение е елементарно). На базата на сравняването на скаларните системи се сравняват и изходните.

В голяма част от изследванията като критериалната система се използва нулевата система (на която дясната страна е нула).

6. Angelova J. A., Dishliev A. B., Nenov S. I., The topological principle and comparison of solution of systems ODE, International J. of Differential Equations and Applications, (2000), Vol. 1, n. 1, 1-16.

В настоящата работа са продължени изследванията от предходната статия. Предмет на обсъждане е наредбата на системи обикновени диференциални уравнения, като се отчитат свойствата на решенията им в безкрайността. Намерени са няколко критерия за "предхождане", "следване" и "еквивалентност" на две системи. Разгледаната наредба е частична, нещо повече мнозинството от системите са несравними (въпреки, че може да притежават устойчиви или асимптотически устойчиви нулеви решения). Доказателствата на основните резултати се базират на топологичен принцип в теорията на обикновените диференциални уравнения (теорема на Vazevski, отнасяща се за принадлежност на решение на система обикновени диференциални уравнения към дадено множество в максималния интервал на неговото съществуване).

Установена е връзка между (асимптотична) устойчивост на нулевото решение на система обикновени диференциални уравнения и въведената релация на наредба. Доказано е, че ако системата генерира монотонен поток, то нейното нулево решение е устойчиво тогава и само тогава, когато системата се предхожда от нулевата система $\left(\dfrac{dx}{dt}=0\right)$.

Като е използвана разработената техника за сравняване на решения, повторно са доказани някои класически твърдения относно устойчивостта на нулевото решение на системи диференциални уравнения. Доказателствата се извършват чрез сравняване на изследваната система и подходяща "моделна система", за която са известни качествата на решенията й в безкрайността. Често моделната система е нулевата система.

7. Angelova J. A., Dishliev A. B., Nenov S. I., Comparison of zero-solutions of systems ODE via asymptotically stability, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2000), Vol. 42, n. 3, 339-350.

В работата са продължени изследванията от предходните две статии. Чрез подходящи представяния на десните страни (като сума на линейни и нелинейни функции) и чрез изискване за съществуване на допълнителни степенни ограничения на нелинейностите са разработени нови критерии за сравняване на системи диференциални уравнения, притежаващи асимптотически устойчиви нулеви решения.

Б3. Тема: Фундаментална теория на импулсни диференциални уравнения

8. Bainov D. D., Dishliev A. B., The phenomenon "beating" of the solutions of impulsive functional differential equations, Communications in Applied Analysis, (1997), Vol. 1, n. 4, 435-441.

Разгледана е начална задача за импулсни функционално-диференциални системи уравнения. Импулсните моменти се определят с помощта на множество от изброимо много непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство на системата. По-точно, импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива среща някоя от тези хиперповърхнини.

Явлението, при което интегралната крива среща многократно една и съща хиперповърхнина, се нарича "биене". В тази статия са намерени условия за отсъствие на явлението "биене". Получените резултати се отнасят за импулсни системи функционално-диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия от описания по-горе тип.

Ако хиперповърхнините дивергират към безкрайност равномерно във фазовото пространство на системата и ако отсъства явлението "биене", може да се покаже, че решенията на съответните начални задачи притежават неограничен максимален интервал на съществуване, т.е. те са продължими до безкрайност.

9. Bainov D. D., Dishliev A. B., Quasiuniqueness, uniqueness and continuability of the solutions of impulsive functional differential equations, Rendiconti di Matematica, Roma, (1995), Serie VII, Vol. 15, 391-404.

В работата са продължени изследванията от предходната статия. Отново е разгледана начална задача за импулсни системи функционално-диференциални уравнения, при които импулсните моменти се определят с помощта на множество от изброимо много непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство на системата.

Посочени са условия за квазиединственост, единственост и продължимост на решенията на такива системи. Ще отбележим, че при квазиединствеността се допуска решенията с различни начални условия да се слеят след някое поредно импулсно въздействие на поне едно от решенията. Сливането на решенията може да се осъществи както след импулсно въздействие върху решението на изучаваната система, така и след импулс на решението на смутената система.

Основните резултати се базират на ограничения, от които следва, че импулсните моменти нямат точка на сгъстяване. По друг начин казано, това означава, че разликите между всеки два съседни импулсни моменти са ограничени отдолу с положителна константа. За целта е изучен въпросът и обстоятелствата, при които интегралната крива среща всяка една от импулсните хиперповърхнини най-много един път.

10. Bainov D. D., Dishliev A. B., Hristova S. G., The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations, Indian J. of Pure and Applied Mathematics, (1999), Vol. 30, n. 9, 893-909.

Изследва се начална задача за импулсни системи нелинейни неавтономни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия. Предложен е конструктивен метод за намиране на две функционни редици, едната от които е монотонно растяща, а другата е монотонно намаляваща. Редиците са равномерно сходящи към единственото решение на разглежданата задача.

11. Bainov D. D., Dishliev A. B., Hristova S. G., Monotone iterative technique for impulsive differential–difference equations with variable

impulsive perturbations, Multivariate Approximation and Splines, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.

Разглежда се частен случай на изследваната система от предходните статии с номера 8 и 9. В тази работата фазовото пространство е едномерно и следователно се изучава импулсно уравнение (а не система) с променливи моменти на импулсни въздействия. Импулсните моменти се определят с помощта на криви от разширеното пространство. Изследваното уравнение е диференчно, т.е. дясната страна (освен от търсеното решение, пресметнато в текущия момент) зависи и от това решение, но пресметнато в постоянно (константно) закъснение на настоящия момент. Заедно с описаното уравнение се изучават и съответните му диференциални неравенства.

Със съжаление ще отбележим, че пренебрежимо малко и то сравнително прости класове импулсни диференциално-диференчни уравнения е възможно да се решат аналитично. Това налага да се търсят приблизителни техни решения. В работата (за разглежданите уравнения) е адаптирана монотонно итеративната техника на V. Lakshmikantham. Чрез нея са намерени приблизителни аналитични решения на разглежданите импулсни уравнения, които са "близки" към неизвестното точно решение. Тази техника комбинира идеи на метода на долните и горните решения и намирането на подходящи монотонни (растящи и намаляващи) равномерно сходящи към търсеното решение редици от функции. Именно елементите на тези редици са намерените приблизителни аналитични решения.

12. Bainov D. D., Dishliev A. B., Stamova I. M., Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential–difference equations, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII–Sc. Mat., (1995), Vol. XLI, 45-54.

Обект на изследване е начална задача за линейни нехомогенни системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия. Линейността е свързана не само с дясната страна на системата, но и с операторите, описващи импулсните въздействия. Заедно с дефинираната по-горе задача се разглежда и аналогична начална задача за импулсни системи, при които "свободният" вектор на съответната изходна система и линейните оператори на импулсните въздействия на изходната начална задача са допълнително непрекъснато смутени във времето. С други думи разгледан е случая с постоянно действащи смущения. Тези постоянни въздействия зависят както от времето и търсената функция, така и от операторен образ на решението.

Намерени са общи условия, при които решенията на всеки две съответни начални задачи са асимптотично еквивалентни. Това означава, че е установено съответствие между решенията на двете импулсни системи, при което разликата на съответните решения клони към 0 при неограничено нарастване на аргумента.

Разгледани са няколко конкретни реализации на оператора, който участва в непрекъснато смущаващите вектори. При всяка една реализация са прецизирани общите условия, гарантиращи асимптотична еквивалентност на решенията. Особено впечатляващ е резултата за асимптотична еквивалентност, при който операторът A има вида

$$A_t y = \sup\left\{ y(s);\ t - h(t) \le s \le t \right\},$$

където функцията h е с елементарно проверяеми естествени свойства.

Б4. Тема: Непрекъсната зависимост, устойчивост и ограниченост на решения на импулсни диференциални уравнения

13. Angelova J. A., Dishliev A. B., Continuous dependence and uniform stability of solutions of impulsive differential equations on impulsive moments, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (1997), Vol. 28, n. 5, 825-835.

Изследва се начална задача за нелинейни неавтономни системи импулсни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия. Въведени са понятията непрекъсната зависимост и устойчивост относно смущения в импулсните моменти. Посочени са условия, от които следва, че решенията на тези системи притежават споменатите качества.

Ще обърнем внимание на факта, че равномерна близост между решенията на изходната и смутената задачи не се изисква между съответните импулсни моменти. Действително, точно между тези моменти броят на импулсните въздействия върху сравняваните решения е различен. Поради тази причина "отнапред зададена близост" между решенията в термините на равномерната метрика в интервала между съответните импулсни моменти няма.

При изследване на устойчивостта на решенията на импулсни системи от посочения клас се появяват допълнителни усложнения от факта, че е възможно смущенията на импулсните моменти да са безбройно (изброимо) много. Освен това, в общия случай, тези смущения се появяват неограничено във времето. С други думи, ако импулсните моменти на изходната задача дивергират към безкрайност, то смущенията в тези импулсни моменти също дивергират към безкрайност. Лесно се конструира пример, при който решението на определена начална задача за дадена система без импулси е равномерно асимптотически устойчиво, а решението на съответната начална задача за системата с импулси не е равномерно устойчиво относно смущенията на импулсните моменти. Поради тази причина в работата се предполага допълнително, че решенията на съответните системи без импулси са гранично равномерно устойчиви. Терминът е въведен за първи път в тази работа.

14. Bainov D. D., Dishliev A. B., Stamova I. M., Continuous dependence of solutions of impulsive systems of differential-difference equations on initial data and on a parameter, Boletin da Sociedade Paranaense de Matematica, (1998), Vol. 18, n. 1-2, 21-34.

Разгледана е импулсна система диференциално-диференчни уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия. Импулсните моменти съвпадат с моментите, в които интегралната крива на съответната начална задача среща предварително зададено изброимо множество от непресичащи се хиперповърхнини. Намерени са условия за непрекъсната зависимост на решенията относно началните условия и параметър. Предварителните резултати в тази статия са свързани с установяване на условия за:
- отсъствие на точка на сгъстяване за импулсните моменти,
- отсъствие на явлението "биене",
- продължимост на решенията,
- последователно срещане на едни и същи импулсни хиперповърхнини от решенията на изходната и смутената задачи и др.

Посочените предварителни резултати представляват самостоятелен интерес.

15. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, n. 1, 39-64.

Основен обект на изследване в работата са нелинейни импулсни системи диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсно въздействие. За такъв тип системи са въведени понятията непрекъсната зависимост и устойчивост относно началните данни и импулсните моменти. Намерени са достатъчни условия, при които решенията притежават тези качества. Резултатите са приложени върху математически модел от фармакокинетиката.

Ще се спрем по-подробно на приложението на получените резултати.

В общия случай лечението от редица болестни състояния се осъществява чрез поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта (плазмата) на пациента. Поддържането на терапевтичната плазмена концентрация може да се осъществи по два основни начина:

- чрез непрекъснато подаване на лекарството;
- чрез прекъснато (импулсно) подаване на лекарството през определени времеви интервали.

От фармакокинетична гледна точка непрекъснатото подаване на лекарствата е за предпочитане. За съжаление, този начин на лечение е затруднен при практическото му реализиране. По-точно, в общия случай е невъзможно предписаното лекарство да се подава непрекъснато в продължение на периода на лечение на болния (този период може да е с продължителност на няколко седмици или месеци). Поради тази причина поддържането на терапевтична лекарствена концентрация в кръвта чрез дискретно във времето импулсно подаване на лекарството е по-често срещано. Естествено е да се предполага, че обемът на дискретно подаденото лекарствено средство е ограничен отдолу, т.е. съществува минимално количество от лекарството, което може да се приеме еднократно. При този тип лечение, лекуващият лекар може да манипулира с два фармакокинетични параметъра: размер на еднократната доза на лекарството D_i и дължина на дозовия интервал T_{i+1}, $i=1, 2, \ldots$ По-точно, D_i е дозата при i-тото подаване на лекарството, а T_{i+1} е времето между моментите на i-тото и $(i+1)$-то подаване на лекарството, $i=1, 2, \ldots$ В случаите, когато дозовите интервали са по-кратки от времето, необходимо за пълното елиминиране на лекарството от организма, то започва да се натрупва (кумулира). Тази кумулация е полезна за лечението на пациента, ако се поддържа в интервал, определен от минимална и максимална плазмени граници, наричани терапевтични граници (терапевтичен прозорец) на концентрацията на лекарството. Фармакокинетичният модел на терапевтичното лечение се състои в избора на подходяща дозова схема на лечението, гарантираща поддържането на концентрацията на лекарството в рамките на терапевтичния прозорец.

Въвеждаме следните ограничения и означения:

1. Организмът се представя чрез един компартимент с обем V_d, в който лекарственото средство се разпределя. Възможно е концентрацията на лекарството да е различна в различните части на организма. Предполагаме постоянно съотношение между нивата на лекарството във всяка част на организма в периода на лечението. Това означава, че всяка промяна в плазмената концентрация рефлектира в строго определена съответна количествена промяна в тъканните концентрации.

2. Началният момент на лечението означаваме с t_0;

3. Времетраенето от началния момент на лечение t_0 до първия момент t_1, в който се внася лекарствено средство с обем D_1, означаваме с T_1, т.е. изпълнено е $t_1 = t_0 + T_1$;

4. Дозата D_i от лекарственото средство се внася директно в компартимента в момента $t_i = t_{i-1} + T_i = t_0 + \sum_{j=1,2,\dots,i} T_j$, $i = 1, 2, \dots$;

5. Елиминирането на лекарството протича със скорост, която е пропорционална на моментното му количество в организма, т.е. разглежда се като процес от първи порядък, характеризиращ се със скоростна константа K. Последната константа е сума от константата на метаболизиране K_m и константата на екстрекция на непромененото лекарство K_e. Изпълнено е $K = K_m + K_e$;

6. Означаваме с $A(t)$ количеството лекарствено средство в организма в момента $t \geq t_0$. В общия случай, количеството на това вещество, което се намира в цялото тяло на пациента в произволен момент, не може да бъде определено експериментално. В действителност се определя концентрацията на лекарственото средство в някои от биологичните течности (най-често в кръвта). За математическото моделиране на процеса на лечението е удобно да се въведе обемът, в който се разпределя лекарственото средство. Тази величина, наречена обем на разпределение, означаваме с V_d и е дефинирана така, че е изпълнено равенството

$$C(t) = \frac{A(t)}{V_d}, \quad t \geq t_0,$$

където $C(t)$ е концентрацията на лекарството, измерена в кръвта или по-общо в плазмата. Ще отбележим, че обемът на разпределение няма физиологичен смисъл. Можем да считаме, че това е фиктивен обем, в който ако се разпредели равномерно лекарството в количество $A(t)$, то ще е в концентрация $C(t)$, измерена в плазмата. В действителност част от лекарството се свързва с плазмените и тъканните протеини, поради което неговото разпределение не е равномерно. Поради тази причина обемът на разпределение е възможно да е различен от обема на телесните течности.

7. В началния момент t_0 ще предполагаме, че лекарствената концентрация е C_0. В някои случаи се приема, че $C_0 = 0$.

Математическият модел на идеализирания по-горе процес се описва в с помощта на следната начална задача за импулсно диференциално уравнение:

$$\frac{dC}{dt} = -KC, \quad t \neq t_i,$$

$$C(t_i + 0) = C(t_i) + \frac{D_i}{V_d}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$C(t_0) = C_0.$$

Теоретичните резултати в работата дават възможност да се достигне до следния извод: При определени леснопроверяеми и естествени условия, концентрациите на лекарствените средства в тялото на пациента при две различни схеми на лечение в рамките на ограничен времеви интервал (а при допълнителни ограничения и в рамките на неограничен времеви интервал) са приблизително равни. Условията може да се предредактират както следва:

- Схемите на лечение са приложени към един и същи пациент;
- Концентрациите на лекарствата в началния момент на лечението при двете схеми на лечение се различават несъществено;
- Началните моменти на лечението и при двете схеми приблизително съвпадат;
- Дозировките при всеки дискретен лекарствен прием и при двете схеми на лечение са равни;
- Дозовите интервали (интервалите между два последователни момента на лекарствен прием) са ограничени отдолу;
- Моментите на прием на лекарството в двете схеми на лечение са приблизително едни и същи.

16. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, n. 2, 167-187.

Основен обект на изследване в работата са начални задачи за импулсни нелинейни автономни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсно въздействие. Импулсите се осъществяват, когато траекторията на решението попадне върху така нареченото "импулсно множество", разположено във фазовото пространство на системата.

За такъв тип задачи са въведени понятията орбитална непрекъсната зависимост по Hausdorff относно началната точка и импулсните въздействия. По-подробно, непрекъсната зависимост по Hausdorff относно началната точка и импулсните въздействия означава, че сравнително "малки" смущения на началната точка и импулсните въздействия водят до "малки" различия между траекториите на основната начална задача и съответната й смутена начална задача (траекториите са дефинирани в предварително фиксиран и ограничен времеви интервал). Разстоянието между траекториите е в термините на Хаусдорфова метрика. Ще обърнем внимание, че избраната метрика е изключително удобна при определяне на разстояния между прекъснати функции, особено ако точките на прекъсване на двете функции са различни във времето (каквито са решенията на началните задачи за изходната и смутената импулсни системи диференциални уравнения). Ще отбележим, че при използване на равномерната метрика "близост" между решенията на двете задачи не се изисква в околности на импулсните моменти, въпреки, че сумата от дължините на тези околности може да е произволно малка. Следователно, използвайки "педантично" равномерната метрика при импулсните системи с променливи импулсни моменти, достигаме тривиално до извода, че не може да се твърди: ""Малки" изменения в параметрите на системата водят до "малки" изменения на решението й в термините на равномерната метрика".

При Хаусдорфовата метрика това неудобство отпада.

В работата са намерени достатъчни условия, при които решенията притежават описаното по-горе качество.

Резултатите са приложени върху обобщен математически модел на Lotka-Volterra, описващ динамиката на развитие на съобщество от тип "хищник-жертва", подложено на кратковременни външни въздействия.

17. Chukleva R. B., Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses with respect to the switching functions, International J. of Applied Science and Technology, (2011), Vol. 1, n. 5, 46-59.

Диференциалните уравнения с променлива структура и импулси намират приложение при моделиране на динамични процеси, които по време на своето развитие са подложени на "кратковременни и сравнително интензивни" външни въздействия. След такива импулсни смущения, изучаваният процес продължава своето развитие, като се подчинява на нови, различни от предходните, правила и закони. Математически, това означава, че се сменя структурата, т.е. дясната страна на системата.

По начина на определяне на моментите на импулсните въздействия и смяната на структурата, разглежданите системи се разделят на различни класове:

1. Моментите на превключване са предварително фиксирани;
2. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които интегралната крива (траекторията) анулира предварително зададени функции, дефинирани в разширеното фазово пространство (или фазовото пространство) на системата диференциални уравнения. Тези функции се наричат превключващи;
3. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които траекторията на изучаваната система среща предварително зададени множества, разположени в разширеното фазово пространство. Обикновено това са непресичащи се хиперповърхнини;
4. Моментите на превключване съвпадат с моментите, в които решението минимизира даден функционал;
5. Превключващите моменти имат случаен характер и др.

В статията моментите на превключване са от втория тип и се изследва въпросът за непрекъсната зависимост на решенията. Изучава се начина, по-който измененията на превключващите функции оказват влияние върху съответните решения. Установено е, че при определени условия "сравнително малки" изменения на превключващите функции водят до съответни "малки" изменения в решенията. Разгледан е само случаят, когато времевият интервал на съществуване на решението е ограничен.

18. Bainov D. D., Dishliev A. B., Hristova S. G., Lyapunov's functions and boundedness of the solutions of impulsive differential equations, Applicable Analysis, (1995), Vol. 59, 257-269.

Разгледана е начална задача за импулсни нелинейни неавтономни системи диференциални уравнения. Импулсните моменти са променливи и се определят с помощта на множество от изброимо много непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство на системата.

Намерени са достатъчни условия за ограниченост, равномерна ограниченост и финална равномерна ограниченост на решенията на описаните начални задачи. Резултатите са получени чрез прекъснати аналози на функциите на Ляпунов. Прекъсванията са от първи род и точките на прекъсване лежат на импулсните хиперповърхнини. Резултатите се основават на подходяща затворена интегрална форма на решението на съответната начална задача за разглежданите импулсни системи.

19. Bainov D. D., Dishliev A. B., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1993), Vol. 172, n. 2, 452-462.

Обект на изследване е началната задача от предходната статия. Изследвана е въведената в работата специфична за импулсните системи диференциални уравнения устойчивост относно смущения в импулсните хиперповърхнини. По-точно, изучава се случаят, когато "сравнително малки" смущения в импулсните хиперповърхнини водят до "контролируемо малки" изменения в решенията на изходната система.

Основните резултати се дават в две теореми. Първата от тях съдържа достатъчни условия, при наличието на които, от строга равномерна устойчивост на нулевото решение на рестриктираната система без импулси следва равномерна устойчивост относно импулсните хиперповърхнини на нулевото решение на импулсната система. Втората теорема изучава следствената връзка: Липшицова устойчивост на нулевото решение на системата без импулси - равномерна устойчивост относно импулсните хиперповърхнини на нулевото решение на импулсната система.

Понятието "строга равномерна устойчивост" е въведено от авторите.

20. Bainov D. D., Dishliev A. B., Stamova I. M., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, ANZIAM J., (2002), Vol. 43, 525-539.

Едно от важните направления в теорията на устойчивостта на решенията на диференциални уравнения е практическата устойчивост. Основните резултати в тази област са постигнати от А. Мартинюк през 80-те години на миналия век. Главният проблем при практическата устойчивост е предварително задаване на областта, в която се изменя началното условие, и областта в която остава решението, когато независимата променлива (обикновено, това е времето) принадлежи на максималния интервал на съществуване.

В работата е изучена практическата устойчивост на нулевото решение на импулсни системи от диференциално-диференчни уравнения с постоянни моменти на импулсни въздействия. Изследванията обхващат идеите на:

- директния метод на Ляпунов с помощта на частично непрекъснати функции,
- метода на сравняването,
- техниката на Разумихин.

По-подробно, заедно с основната система е разгледана и допълнителна (помощна) система диференциални уравнения. Представени са изисквания, при които практическата устойчивост на нулевото решение на помощната система имплицира такава устойчивост на нулевото решение на изходната система. Посочената връзка между двете системи е получена чрез диференциални неравенства. Естествено е да се предполага, че помощната система притежава дясна страна, която има определен тип монотонност и е от значително по-нисък ред в сравнение с изходната. Това естествено предположение би трябвало в общия случай да опрости изследването на асимптотичните качества на нулевото решение (в това число и практическата му устойчивост). Последното обстоятелство от своя страна оправдава прилагането на метода на сравняването.

Резултатите са реализирани при изучаване на практическата устойчивост на нулевото решение на уравнението с константно закъснение на G. Hutchinson. Споменатото уравнение моделира динамиката на развитие на отделен вид популация. Допълнително се предполага, че биомасата на популацията е подложена на импулсни въздействия, дължащи се преди всичко на антропогенен фактор.

21. Dishliev A. B., Stoykov D. S., Stability via limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, n. 4, 369-388.

Обект на изследване (както в работа с номер 18) са импулсни системи нелинейни неавтономни диференциални уравнения. Импулсните моменти са променливи и се определят с помощта на множество от изброимо много непресичащи се хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство на системата.

Въведени са редица нови понятия, от които тук ще обърнем внимание на едно от тях, а именно "еквитотална устойчивост на ненулевите решения на разглежданата импулсна система, независимо от транслациите на импулсните хиперповърхнини". Ще посочим някои специфични особености на споменатото понятие:

- устойчивостта е тотална, защото се допускат смущения както в началното условие, така и в дясната страна на системата;
- устойчивостта е "екви", защото се отнася за всяка началната точка на решенията, която принадлежи на фазовото пространство;
- устойчивостта не зависи от транслациите на импулсните хиперповърхнини, защото е валидна за всеки "комплект" импулсни хиперповърхнини, получен от изходния чрез добавяне на една и съща произволна константа към всяка една от хиперповърхнините.

По аналогия е въведено и понятието "тотална устойчивост на нулевото решение на разглежданата система, независимо от транслациите на импулсните хиперповърхнини". Както се вижда, тук не се изисква устойчивостта да е валидна за всяка начална точка от фазовото пространство.

За всяка функция $f: R^+ \times D \to R^n$ (D е област от R^n) и за всяка положителна константа θ се дефинира функцията $f_\theta : R^+ \times D \to R^n$ с помощта на равенството

$$f_\theta(t,x) = f(t+\theta, x),\ (t,x) \in R^+ \times D.$$

Ще казваме, че функцията $f^* : R^+ \times D \to R^n$ е гранична за f, ако съществува редица от положителни числа $\theta_1, \theta_2, \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = \infty$, такава, че съответната редица от функции $f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \ldots$ клони равномерно към f^* в $R^+ \times D$. Възможно е дадена функция да няма, да има една, краен брой или безбройно много гранични функции. В много случаи граничните функции притежават сравнително "по-добри" (по-лесно проверяеми) качества в сравнение с изходната функция. Съответната система диференциални уравнения (с дясна страна, съвпадаща с някоя гранична функция на дясната страна на изходната система) се нарича гранична система.

В работата е намерена връзка между качествата на решенията на изходната импулсна система и решенията на съответните импулсни гранични системи. По-точно, намерени са достатъчни условия, от които следва, че ако всяка една от граничните системи притежава еквитотално устойчиви ненулеви решения, независимо от транслациите на импулсните хиперповърхнини, то изходната система притежава тотално устойчиви ненулеви решения. Подобни резултати са получени и за нулевите решения.

Поради специфични особености на решенията (например, нулевото решение не е подложено на импулсни въздействия, за разлика от ненулевите решения), то получените резултати за ненулевите решения от една страна и нулевото решение от друга се различават.

Теоретичните изследвания са приложени върху математически модел на съобщество от тип "хищник-жертва", подложено на импулсни външни въздействия. Ще обърнем внимание на факта, че с помощта на граничните системи са "премахнати" редица ненужни обременяващи разглеждания, свързани с първоначални смущения в модела. Тези пертурбации се случват в ограничен времеви интервал, стартиращ от началния момент на развитие на модела, респективно на описвания динамичен процес. След това се достига до развитие, подчинено на трайно установени зависимости. Това обстоятелство безспорно улеснява изследванията за установяване на различни типове устойчивост на съответните гранични импулсни системи. След това, на базата на доказаните теореми намерените качества се прехвърлят и тълкуват върху решенията на изходния модел.

22. Dishliev A. B., Stoykov D. S., Stability of limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, n. 4, 389-410.

Изследванията в работата са продължение на тези от предходната статия и в известен смисъл намерените взаимовръзки са в обратна посока. Получени са достатъчни условия, от които следва, че ако изходната система притежава еквитотално устойчиви ненулеви решения, независимо от транслациите на импулсните хиперповърхнини, то всяка една от граничните системи диференциални уравнения притежава тотално устойчиви ненулеви решения. Подобни са резултатите и за нулевото решение.

23. Bainov D. D., Dishliev A. B., Stamova I. M., Lipschitz quasistability of impulsive differential–difference equations with variable inpulsive perturbations, J. of Computational and Applied Mathematics, (1996), Vol. 70, n. 2, 267-277.

Разглеждат се импулсни системи диференциално-диференчни уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия. С помощта на фундаментална лема за сравнение (В. Лакшмикантам – Д. Байнов – П. Симеонов) са дадени достатъчни условия за равномерна Липшицова устойчивост на произволни решения на изучаваната система.

24. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Orbital gravitation and orbital Hausdorff stability of Lotka-Volterra model, International J. of Applied Science and Technology, (2011), Vol. 1, n. 6, 134-144.

Основен обект на изследване в работата е класическата моделна система на Lotka-Volterra, описваща динамиката на развитие на съобщество от тип "хищник-жертва". В работата са въведени две нови понятия: орбитална гравитация на решенията и устойчивост по Hausdorff.

Казваме, че системата е орбитално гравитираща, ако Хаусдорфовото разстояние между всеки две орбити на системата е по-малко от съответното Евклидово разстояние, умножено с подходяща константа κ, наречена гравитираща константа.

Решението на разглежданата система наричаме устойчиво по Hausdorff, ако Хаусдорфовото разстояние между всеки две траектории е "произволно малко" при условие, че началните точки на траекториите са "достатъчно близки" помежду си.

Основните твърдения в тази статия установяват, че класическата система на Lotka-Volterra притежава описаните по-горе качества без съществени допълнителни изисквания.

25. Chukleva R. B., Dishliev A. B., Dishlieva K. G., Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions, International Journal of Differential Equations and Applications, (2012), Vol. 11, n. 1, 57-80.

В статията се изучава специфичен клас нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Десните страни на системата са изброимо много и тяхната смяна се извършва последователно във времето. На всяка една дясна страна съответства така наречената "превключваща функция", която е дефинирана във фазовото пространство на системата. Поредната промяна на дясната страна, а също така и импулсното въздействие върху решението се извършва в момента, в който решението анулира съответната превключваща функция. Множеството от фазовото пространство, в което се анулира коя да е превключваща функция се нарича съответно превключващо множество. Ясно е, че всяка дясна страна на системата притежава различно превключващо множество.

Основният резултат в разглежданата статия се състои в установяването на достатъчни условия за устойчивост, равномерна устойчивост и асимптотическа равномерна устойчивост относно началното условие на нулевото решение на началната задача за описаните по-горе системи диференциални уравнения с променлива структура и импулси. Тъй като нулевото решение не е подложено на импулсни въздействия, за разлика от съответното му смутено решение, то е налице възможност да се изисква "равномерна близост" между тези две решения (на основната и смутената системи) в общия им дефиниционен интервал. Близостта се изисква без прекъсвания във времето, въпреки, че решението на смутената система е прекъсната функция.

Резултатите са получени с помощта на подходяща модификация на втория метод на Ляпунов (известен още като директен метод). Същността на предложената модификация се състои в следното. За всяка система диференциални уравнения с променлива структура и импулси се построява помощна редица от функции на Ляпунов, притежаващи специфични свойства. Качествата на функциите от тази редица гарантират различните видове устойчивост на нулевото решение.

Ще обърнем внимание на следните факти:

1. Последователно, всяка една от функциите на Ляпунов (от построената помощна редица) съответства на поредната дясна страна на разглежданата система диференциални уравнения с променлива структура и импулси;
2. Последователната смяна (активиране) на функциите на Ляпунов се синхронизира във времето със смяната на дясната страна на изучаваната система, т.е. моментите, в които се осъществяват тези промени са едни и същи;
3. Допустимо е всяка една от функциите на Ляпунов да е по части непрекъсната функция. Точките на прекъсване за всяка една от тях съвпадат с множество на превключване на съответната дясна страна на системата.

26. Bainov D. D., Dishliev A. B., Stamov G. T., Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations, Kumamoto J. Math., (1997), Vol. 10, 1-10.

Една хомогенна линейна система диференциални уравнения от вида

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z, \quad A : R \to R^n \times R^n$$

се нарича хиперболична, ако:

$$(\exists \lambda > 0)(\exists a > 0)\left(\exists M^+, M^- : M^+ \oplus M^- = R^n\right):$$

$$\left(ako\ z_0 \in M^+\right) \Rightarrow \left\|z(t;t_0,z_0)\right\| \le a\left\|z_0\right\| e^{-\lambda(t-t_0)};$$

$$\left(ako\ z_0 \in M^-\right) \Rightarrow \left\|z(t;t_0,z_0)\right\| \le a\left\|z_0\right\| e^{\lambda(t-t_0)}.$$

В работата се разглежда импулсна система нелинейни неавтономни диференциални уравнения с главна линейна част. Импулсните моменти са фиксирани. Намерени са достатъчни условия, при които системата притежава почти периодично решение. Основното предположение е, че главната линейна част на системата без импулси е хиперболична.

Б5. Тема: Осцилационни свойства на решения на импулсни диференциални уравнения

27. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscilatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument, J. of Applied Analysis, (1998), Vol. 4, n. 2, 215-230.

Изследва се импулсно линейно хомогенно диференциално уравнение от първи ред с постоянно закъсняващ аргумент. Разглежда се случаят, когато аргументът на неизвестната функция е само закъсняващ. Импулсните моменти са фиксирани. Посочени са достатъчни условия за осцилиране на всички решения.

28. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument, J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, (1998), Vol. 11, n. 1, 95-102.

Разгледано е импулсно линейно хомогенно диференциално уравнение от първи ред. Изучен е случаят, когато аргументи на неизвестната функция са както настоящия момент, така и минал момент, който е постоянно закъсняващ във времето. Импулсните моменти са фиксирани. Посочени са достатъчни условия за осцилиране на всички решения.

29. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscillating solutions of nonlinear impulsive differential equations with a deviating argument, Note di Matematica, (1995), Vol. 15, n. 1, 45-54.

Намерени са достатъчни условия за осцилиране на всички решения на клас от импулсни нелинейни неавтономни диференциални уравнения от първи ред с разделени променливи и константно закъснение. Импулсните моменти са фиксирани.

30. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscillation of the solutions of impulsive differential equations and inequality with a retarded argument, The Rocky Mountain J. of Mathematics, (1998), Vol. 28, n. 1, 25-40.

Обект на изучаване са импулсни нелинейни диференциални уравнения и неравенства от първи ред с няколко (краен брой) закъсняващи аргументи. Съществено обстоятелство и трудност при изследванията е, че търсената (неизвестната) функция, зависи от няколко различни постоянно закъсняващи аргументи. Импулсните моменти са фиксирани.

Намерени са условия гарантиращи, че всички решения на разглежданите уравнения и неравенства са осцилиращи.

31. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscillation of the bounded solutions of impulsive differential-difference equations of second order, Applied Mathematics and Computation, (2000), Vol. 114, n. 1, 61-68.

Разглежда се импулсно линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред с постоянно закъсняващ аргумент. Импулсните моменти са предварително зададени. Намерени са достатъчни условия за:
- знакоопределеност на неограничените решения;
- осцилиране на всички ограничени решения.

32. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument, Kodai Mathematical J., (1997), Vol. 20, n. 2, 120-126.

В настоящата работа се изучават някои асимптотични свойства на решенията на клас от импулсни диференциални уравнения от втори ред с постоянно закъсняващ аргумент. Импулсните моменти са фиксирани. Посочени са достатъчни условия за осцилиране на всички ограничени решения на разглежданите уравнения.

33. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument, Applicable Analysis, (1996), Vol. 63, n. 3 & 4, 287-297.

В работата са продължени изследванията от предходната статия. Обект на изследване е същото диференциално уравнение.

Намерени са необходими и достатъчни условия за съществуване на неосцилиращо решение на клас от импулсни диференциални уравнения от втори ред с постоянно закъсняващ аргумент. Импулсните моменти са фиксирани.

34. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Non oscillatory solutions of a class of impulsive differential equations of n-th order with retarded argument, Kyungpook Mathematical J., (1999), Vol. 39, n. 1, 33-46.

Изучен е клас от импулсни нелинейни неавтономни диференциални уравнения от n-ти ред със закъсняващ аргумент. Закъсняващият аргумент не е постоянен и е строго монотонно растящ във времето. Импулсните моменти са фиксирани. Ще отбележим, че импулсните въздействия върху решенията също зависят от закъсняващия аргумент.

В работата са изучени асимптотични свойства на неограничените и неосцилиращи решения на описания клас диференциални уравнения.

35. Bainov D. D., Dimitrova M. B., Dishliev A. B., Oscilation of the solutions of nonlinear impulsive differential equations of the first order with advanced argument, J. of Applied Analysis, (1999), Vol. 5, n. 2, 261-275.

Разглежда се клас от импулсни нелинейни диференциални уравнения и неравенства от първи ред. Неизвестната функция зависи от няколко изпреварващи аргументи, като изпреварванията са постоянни. При такива уравнения и неравенства текущата стойност на търсената функция (т.е. състоянието на процеса, който се описва с уравнението или неравенството) зависи от неговото бъдеще и то пресметнато в няколко бъдещи моменти. Импулсните моменти са предварително определени.

Намерени са достатъчни условия, при които всички решения на уравнението са осцилиращи, а решенията на неравенствата са или осцилиращи, или са финално знакоопределени, като знакът им зависи от посоката на разглежданото неравенство. Резултатите са приложени върху моделно уравнение на кръвообразуването с изпреварващ аргумент. Този тип уравнения са изключително полезни при моделирането на кръвообразуването, тъй като създаването на кръвта в настоящия момент е в тясна връзка или в зависимост от нашите желания за състоянието и количеството на кръвта в бъдеще време.

Ще отбележим, че основните затруднения при изучаването на качествата на решенията на този тип уравнения и/или неравенства (с изпреварващи аргументи) се дължи на факта, че моментните стойности и/или качества на решенията, зависят от стойностите и качествата на същите решения в бъдещи (все още несъстояли се) моменти. Именно "прогнозирането" на тези стойности или (което е по-често) оценяване на тяхното влияние е основен приоритет при представените изследвания.

36. Dishliev A. B., Markova N. T., Sufficient conditions for oscillation of the solutions of impulsive linear homogeneous differential equations with retarded argument, Communications in Applied Analysis, (2007), Vol. 11, n. 2, 223-228.

В настоящата работа са разглеждат линейни хомогенни диференциални уравнения с импулси и закъсняващ аргумент. Импулсните смущения се реализират в моментите, в които интегралната крива на решението пресича някоя от предварително зададени криви, наричани "импулсни криви". Импулсните криви са непресичащи се и са разположени в разширеното фазово пространство. Закъснението на аргумента не е постоянно и зависи както от времето, така и от търсената функция.

Намерени са достатъчни условия за осцилиране на решенията на такива уравнения.

Б6. Тема: Оптимизационни свойства на решения на импулсни диференциални уравнения

37. Angelova J. A., Dishliev A. B., Optimization problems in population dynamics, Applicable Analysis, (1998), Vol. 69, n. 3&4, 207-221.

В работата се разглежда начална задача за автономни нелинейни диференциални уравнения с фиксирани моменти на импулсни въздействия от вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ t \neq t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$x(t_i + 0) = x(t_i) - I_i;$$
$$x(0) = x_0 .$$

Решена е следната оптимизационна задача, свързана с избор на импулсните моменти и големините на импулсните въздействия (в случая импулсни отнемания). Да се определят:

• броят n на импулсните моменти;

• големините на импулсните моменти: $t_1, t_2, \ldots, t_n;\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$;

• количествата на импулсните отнемания: $I_1, I_2, \ldots, I_n$,

така, че да са валидни изискванията:

◦ $I_{\min} \le I_i \le I_{\max},\ i = 1, 2, \ldots, n,$ където положителните константи $I_{\min}$ и $I_{\max}$ са предварително зададени;

◦ $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I_{\max}$;

◦ в момента T решението на разглежданата задача да има възможно най-голяма стойност.

Резултатите са приложени за импулсните модели на Verhulst и Gompertz. За целта са разгледани конкретни реализации на функцията f.

Едно възможно тълкуване на резултатите е следното. Нека биомасата на изолирана популация е полезна и е допустимо от нея да се отнема биомаса чрез дискретни импулсни въздействия. Нека минималното количество биомаса, което може да се отнеме еднократно, е $I_{\min}$. Нека необходимото количество от биомасата е $I_{\max}$, което трябва да се достави за период от време T. Естествено е желанието: «В крайния момент T (предполагаме, че началният момент $t_0 = 0$) биомасата на популацията да е максимална по обем».

Тогава, по този естествен начин, възниква следната задача: «Да се определят моментите и количествата на отнеманията така, че да са изпълнени поставените по-горе изисквания». В разглежданата работа е решена формулираната задача.

38. Angelova J. A., Dishliev A. B., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2000), Vol. 39, n. 4, 483-497.

Разгледано е нелинейно неавтономно импулсно диференциално уравнение. Както следва от споменатия тип на уравнението, дясната страна зависи съществено от времето. Именно това обстоятелство (за разлика от предходната статия) затруднява сериозно изследванията, представени в работата. Импулсното въздействие е само едно с предварително определена големина. Обикновено се предполага, че след импулс фазовата променлива "намалява". Ако уравнението представлява модел от популационната динамика на изолирана популация, то "намаляването на фазовата променлива" означава, че еднократно и импулсно (мигновено) се отнема биомаса от популацията. Освен това се счита, че обемът I на отнемането е предварително фиксиран. Целта на многобройните твърдения в работата (по-голямата част от тях са помощни) е да се определи импулсният момент така, че в крайния момент T на изследване на популацията, тя да притежава максимален обем. В този случай се казва, че популацията се развива по оптимална траектория. За целта е намерена импулсна крива, разположена във фазовото пространство на уравнението, която притежава следното оптимално свойство. Ако импулсният момент съвпада с момента, в който решението на коя да е начална задача за изследваното уравнение пресича импулсната крива, то траекторията е оптимална. Установено е, че ако дясната страна на уравнението е функцията $f(t,x)$ и импулсната крива е $x=\psi(t)$, то е изпълнено равенството

$$f\left(t,\psi(t)\right)=f\left(t,\psi(t)-I\right),\ 0=t_0\le t\le T .$$

Изследвания са приложени върху няколко конкретни модели от популационната динамика.

Разискваната работа е най-цитираната (общо 35 пъти) в сравнение с всички други статии, представени за участие в конкурса.

39. Angelova J. A., Dishliev A. B., Nenov S. I., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator–prey model, International J. of Differential Equations and Applications, (2001), Vol. 3, n. 4, 365-376.

Изследва се класическата система диференциални уравнения на Lotka–Volterra, описваща взаимодействието на два антагонистични биологични вида, наричани "хищник-жертва". Много често антагонистичните видове практически представляват хомогенна биомаса, сепарирането на които е невъзможно. Следователно, външните импулсни отнемания (и по-рядко добавяния) на биомаса към съобществото се състои от "смес" от двата вида. При това е ясно, че процентното съотношение на биомасите в отнетото количество съвпада с моментното съотношение на биомасите в популацията (разбира се, в случаите когато сместа е хомогенна). Ясно е, че при такива съобщества, импулсните въздействия математически се изразяват с импулсен вектор, който е насочен от изобразяващата точка на съобществото към началото на координатната система. Дължината на вектора отразява количеството на отнетата биомаса.

Решена е следната оптимизационна задача. Нека γ_{c_0} е затворена фазова траектория на динамиката на развитие на съобщество, подчинено на моделната система на Lotka–Volterra. Ще прецизираме описанието на траекторията γ_{c_0}. За целта нека $\Phi: R^+\times R^+\to R^+$ е първи интеграл на системата на Lotka–Volterra. Тогава, за всяка неотрицателна константа c_0 означаваме

$$\gamma_{c_0}=\left\{\left(m,M\right)\in R^+\times R^+;\ \Phi\left(m,M\right)=c_0\right\},$$

където m е количеството на биомасата на жертвата, а M е количеството на биомасата на хищника. Нека G е област от вътрешността на контура γ_{c_0}, която съдържа единствения устойчив център $\left(m_{уст.},M_{уст.}\right)$ на системата. Ще припомним, че за устойчивия център имаме

$$\Phi\left(m_{уст.},M_{уст.}\right)=0 \text{ или } \left(m_{уст.},M_{уст.}\right)=\gamma_0 .$$

Нека след импулсно въздействие, развитието на съобществото задължително се осъществява по траектория $\gamma_{c_1}\subset\overline{G}$, където $\overline{G}$ е затворената обвивка на G. Намерени са траекторията γ_{c_1} и точката върху траекторията γ_{c_0}, от която се осъществява импулса. При горните обстоятелства, импулсът, който "прехвърля развитието на съобществото" от траекторията γ_{c_0} върху траекторията γ_{c_1}, е минимален, т.е. дължината на вектора на импулса е възможно най-малка.

40. Angelova J. A., Dishliev A. B., Nenov S. I., I–optimal curve for impulsive Lotka–Volterra predator–prey model, Computers & Mathematics with Applications, (2002), Vol. 43, n. 10-11, 1203-1218.

За класическата система на Lotka–Volterra, описваща взаимодействието на съобщество от тип "хищник-жертва", е въведено ново понятие: I-оптимална крива ξ_I. Тази крива е разположена във фазовото пространство на системата. Кривата ξ_I пресича всяка траектория γ_c, $c \in R^+$, на системата на Lotka–Volterra точно един път. Точките от I-оптималната крива притежават следното оптимално свойство. Ако $(m,M) \in \xi_I \cap \gamma_c$, то след "скок" от тази точка с големина I в посока към началото на координатната система, изобразяващата точка на системата, т.е. на динамиката на развитие на изследваната популация, попада върху траекторията γ_{c_1}, където константата c_1 е минимална. Следователно γ_{c_1} е възможно "най-близката" траектория до устойчивия център. От друга страна ще отбележим, че устойчивият център представлява траектория, състояща се от една точка и се получава при $c=0$. С други думи, изпълнено е, че устойчивият център $(m_{уст.}, M_{уст.}) \equiv \gamma_0$.

В работата са уточнени различни качества на I-оптималната крива ξ_I, като: непрекъснатост, монотонност и линейна асимптотичност.

Б7. Тема: Математическо моделиране

41. Dishliev A. B., Dishlieva K. G., An estimation for polynomials with real roots, Proceedinds of the VIII–th International Colloquium on Differential Equations, 18 – 23 August 1997, Plovdiv, Bulgaria, Editor: E. Minchev, Academic Publications, Vol. I, (1997), 27-34.

В статията е намерена оценка, която се отнася за стойностите на полином с реални корени от степен $n \geq 2$:

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n .$$

Оценката е в сила за аргументи, които са заключени между най-малкия и най-големия корен на полинома. Валидно е неравенството

$$|P_n(x)| \leq \max\left\{|P_n(x_1-d)|, |P_n(x_n+d)|\right\}, \ x_1 \leq x \leq x_n ,$$

където $d = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\max\left\{(x_{i+1}-x_i),\ i=1,2,\ldots,n-1\right\}$.

Получената оценка може да се приложи успешно в теорията на апроксимациите. Нека L е полиномът на Лагранж за функцията f в точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Тогава, с помощта на намерената оценка за $x \in [x_1, x_n]$, получаваме

$$|f(x) - L(x)| = \frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(x_0)\right|\left|(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_2)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(x_0)\right|.\max\left\{\left|P_n(x_1-d)\right|,\left|P_n(x_n+d)\right|\right\},$$

където $x_1 < x_0 < x_n$.

42. Angelova D. G., Dishliev A. B., Vasilev I. G., Slavtcheva L., Fracture of metals as a random process–strength spaces, International J. of Fracture, (1992), Vol. 58, 33-38.

Якостта на металите, подложени на външни натоварвания (опън), се изследва чрез различни методи, основна част от които използват статистически апарат. Целта на настоящото изследване е да се проследи историята на метала в интервала "начален момент на натоварването – деструктуриране на метала". Статистическите данни са подготвени с помощта на универсална тест-машина (FPZ-100) върху тестови алуминиеви пластини. Намерена е подходяща функция, описваща надеждността на метала. Параметрите на функцията са получени по метода на най-малките квадрати.

43. Angelova D. G., Dishliev A. B., Vasilev I. G., Fracture of metals as a random process, International J. of Fracture, (1993), Vol. 60, 27-32.

Разрушаването на целостта на металите, подложени на външни натоварвания е обект на изследване и в тази работа. Един от подходите се базира на методите в теорията на случайните процеси. За целта са проведени достатъчно на брой експерименти на еднотипни метални характеристики при еднакви странични (външни) фактори. Ще отбележим, че възможностите за статистически анализ на разрушаването са свързани преди всичко с прогнозиране на поведението на метала (в случая технически чист алуминий), при натоварване. Това практически определя ефективното и надеждно използване на детайли, произведени от метала. Предметът на тази изследователска работа е една от стандартните характеристики на метала, а именно якостта на опън. По-точно, якостта на опън се изучава като характеристика, която след като се достигне, в метала се получават финални пукнатини, предизвикващи разрушаване.

Получените експериментални данни са апроксимирани с подходяща аналитична функция, чийто параметри са получени чрез метода на най-малките квадрати.

44. Angelova D. G., Dishliev A. B., Vasilev I. G., Slavtcheva L., Effect of defect orientation on metal fracture–statistical prognosis, International J. of Fracture, (1993), Vol. 63, 287-295.

Изследванията в работата са продължение на предходните две статии.

Алуминиеви образци с предварително причинени дефекти (пукнатини) са тествани на външни въздействия (опън) при различни температури. Дефектите (направленията на пукнатините) са различно ориентирани спрямо оста на опън. Резултатите са преминали статистическа обработка, съответстваща на основните методи в теорията на разрушаването на метали. Представен е адекватен аналитичен модел за прогнозиране на надеждността на метала в обхвата на описаните параметри на опън. Дава се методологичен подход за оценка на влиянието на ориентацията на пукнатините върху фрактурите при металите, предизвикани от външни натоварвания.

45. Angelova D. G., Dishliev A. B., Vassilev I. G., Slavtcheva L., Statistical prognosis of the behaviour of aluminium spesimens with

three defects in the whole range of applied stresses, International Metallurgy and Matenais Congress, Istambul, 11 - 15 June 1997, (1997), 799-802.

Проучването представя процесите на разрушаване на дефектирали образци от алуминий от статистическа гледна точка. Целта е намирането на подходящ математически модел за прогнозиране на надеждността на алуминиеви образци, притежаващи три произволно разположени пукнатини. Броят на пукнатините от теоретична гледна точка е несъществен. За целта, върху образеца е нанесена равномерна мрежа от точки. Предварително, за всеки три различни възела (точки) от мрежата са тествани достатъчен брой (от статистическа гледна точка) образци с нанесени три пукнатини в тези възли. На базата на получените тестови резултати се прогнозира надеждността на образец с произволно разположени три пукнатини. По-точно, за всяка от трите пукнатини на изучавания образец са намерени четирите ограждащи възела. Намерени са $64 = 4 \times 4 \times 4$ на брой комбинации от три ограждащи възли. За всяка от ограждащите комбинации е намерено съответно тегло, отразяващо близостта на трите пукнатини от изследвания образец до съответните три пукнатини от комбинацията. Всяка комбинация отговаря на тестови образец надеждността на който е определена експериментално. Надеждността на изучавания дефектирал образец е теглова сума от надеждностите на всичките 64 ограждащи тестови образци.

В. Учебни помагала

46. Дишлиев А. Б., Учебни записки по теория на масовото обслужване, (2011).

Теорията на масовото обслужване като раздел от теорията на вероятностите възниква сравнително неотдавна. Първите резултати се появяват в началото на миналия век и са предизвикани от потребностите на практиката (в частност от широкото развитие на телефонните мрежи). Поради тази причина и до днес в работите по теория на масовото обслужване се използват термини, които са взаимствани от телекомуникациите, като: заявка, канал, системи за обслужване, средна продължителност на обработка и др. Малко по-късно беше обърнато внимание на факта, че общите математически модели, описващи процеси от телекомуникациите, могат със същия успех да се използват и при описание на други процеси от практиката. Сега методите от теорията на масовото обслужване намират приложения при решаване на проблеми от теория на надеждността, при анализиране на процесите на функциониране на сложни системи, при разработване на автоматизирани системи за управление, в социалните области (транспорт, системи за връзка, системи за снабдяване, медицинско обслужване и т.н.).

Практически, основната задача на теорията на масовото обслужване се състои в изследването на произволни операции, за осъществяването на които оказват влияние случайни фактори.

При системите за масово обслужване, описващи функционирането на различни реални обекти, е характерно, че те работят под въздействието на случайни фактори. Например, моментите на постъпване на заявките са случайни величини. Продължителността на обслужване на заявките е също случайна величина. Поради това, процесът на функциониране на такива системи носи случаен характер. Във връзка със споменатото обстоятелство, методите на изследване на СМО имат вероятностен характер.

В предлагания курс за описаните класове СМО са намерени числови характеристики на следните по-важни параметри на системите: интензивност на входящия поток от заявки, интензивност на обслужващите устройства, среден брой работещи канали, среден брой чакащи за обслужване заявки, вероятност за отказ на изпълнение на заявката, вероятности на различните състояния на системата и др.

Изложението на лекционния материал не изисква знания, извън курса по теория на вероятностите, който традиционно се чете пред студентите от нашия Унивеситет. Първите няколко теми имат за цел да припомнят понятия и твърдения, които се използват в основната част от анонсираната учебна дисциплина. Изложението е сравнително леко и съпроводено с множество илюстриращи примери.

Записките се основават на курса лекции по теория на масовото обслужване, които авторът изнася в продължение на десетина години пред студенти от редовна и задочна форма на обучение в магистърската образователна степен на специалността "Индустриален мениджмънт" на ХТМУ.

47. Дишлиев А. Б., Учебни записки по математическа икономика, (2011).

Основната цел на учебната дисциплина Математическа икономика е да се представят някои основни математически методи и модели, които се прилагат в икономическите изследвания. Естествено е, че тази задача не може да се постигне без привличането на съответен математически апарат, какъвто са: елементи от линейната алгебра, математическия анализ, теорията на Евклидовите пространства и съответната им топология и др. Ще обърнем внимание на факта, че за проучването и разбирането на математическите твърдения са достатъчни познанията по математика, получени в бакалавърския курс на нашия Университет. Малкото допълнителни математически знания са дадени в сравнително сбита форма в няколко предварителни теми. В изложението на материала се разглеждат множество придружаващи и илюстриращи примери от икономиката, които осмислят преподаването на тази дисциплина. Това обстоятелство прави разглеждания курс полезен за бъдещите инженери, които ще работят в областта на мененджмънта.

Сама по себе си математическата икономика е обширна и бързо развиваща се наука. Поради тази причина, в известен смисъл заглавието на курса е твърде амбициозно. По-точно би било заглавието на този курс да е от типа на "Увод в математическата икономика" или "Елементи на математическата икономика". Това обстоятелство е пропуснато с цел заглавието да е по-компактно.

Записките се основават на курса лекции по математическа икономика, които авторът изнася в продължение на десетина години пред студенти от редовна и задочна форма на обучение в магистърската образователна степен на специалността "Индустриален мениджмънт" на ХТМУ.

Юни, 2012 г.

Ангел Дишлиев:....................