

Резюмета на основните резултати и научните приноси

УЧЕБНИЦИ И УЧЕБНИ ПОМАГАЛА

Учебникът [1] е предназначен за обучение на студентите от технически университети. Разгледани са следните основни теми:

1. Събития, вероятност, случайни величини.
2. Описание на системите за масово обслужване.
3. Едноканални системи за масово обслужване с откази.
4. Многоканални системи за масово обслужване с откази.
5. Системи за масово обслужване с неограничен брой канали и откази.
6. Едноканални системи за масово обслужване с ограничен брой места за чакане.
7. Едноканални системи за масово обслужване с неограничен брой места за чакане.
8. Многоканални системи за масово обслужване с ограничен брой места за чакане.
9. Многоканални системи за масово обслужване с неограничен брой места за чакане.

Като допълнение са разгледани някои основни въпроси свързани с:

10. Интеграл на Поасон.
11. Редове на Тейлор и МакЛорен.
12. Линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред.

В учебното помагало [2] са разгледани някои основни методи за работа с пакета Maple.

1. Основни възможности на пакета за работа с математически обекти (числа, функции, матрици, и др.).
2. Преобразуване на изрази (опростяване, представяне в сума на елементарни дробно-рационални функции, и др.).
3. Диференциране и интегриране.
4. Възможности за дефиниране на свойства на обекти.
5. Типове в Maple.
6. Уравнения, алгебрични методи за определяне на корени.
7. Числени методи за определяне на корени.
8. Интерполация и апроксимация (метод на най-малките квадрати).

9. Графични възможности на Maple.

В монографията [3] са разгледани някои въпроси от линейната алгебра свързани с приложения в САЕ софтуер и по-специално ANSYS. Една от основните цели е компютърната реализация на алгоритъма на Гаус и негови модификации. Разгледани са следните основни теми:

1. Системи от линейни уравнения и числа с плаваща десетична точка.
2. Неасоциативност на множеството на реалните числа с плаваща десетична точка и влияние върху алгоритъма на Гаус.
3. Декомпозиция на матрица (LU-декомпозиция, PLU-декомпозиция, QR-декомпозиция, декомпозиция на Cholesky и др).
4. Три-диагонални матрици и метод на Thomas.
5. Псевдо обратна матрица. Общ вид на решения на система от линейни уравнения (случай на различен брой неизвестни и уравнения).
6. Метод на най-малките квадрати и регуларизация по Тихонов.
7. Итеративни методи за решаване на система от линейни уравнения (Jacobi метод, Gauss-Seidel метод, SOR метод).

Използвайки резултатите и изложения материал в [3] в монографията [4] са приведени някои методи свързани с апроксимиране на решения на диференциални уравнения които често се използват като модели в ANSYS. Разгледани са следните основни теми:

1. Мрежи в дву-мерни и три-мерни ограничени области.
2. Числено диференциране.
3. Диференчни схеми за апроксимация на решения на обикновени диференциални уравнения.
4. Диференчни схеми за апроксимация на решения на частни диференциални уравнения:
 - (а) Уравнение на адвекция.
 - (б) Уравнение на топлопроводимост.

Основно е разгледан въпроса за методите за въвеждане на мрежи в реални дву- и три-мерни ограничени области (избор на стъпки на мрежата) и сходимостта на разгледаните методи. Отделено е внимание и на геометричната конструкция и адекватност на мрежи в неевклидови области.

В допълнението са приведени някои необходими сведения от математическия анализ:

1. Теорема за смяна на променливите и приложения.
2. Символи на Bachmann-Landau.
3. Теорема на Taylor и приложения.

В монография [5] се изучават и използват като математически апарат няколко класа диференциални уравнения с импулси. Разгледани са следните свойства на решенията:

1. Вибрации на решенията на автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси.
2. Непрекъсната зависимост на решения на неавтономни диференциални уравнения с променлива структура и импулси относно превключващите функции.
3. Устойчивост и ограниченост на решенията на диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани превключващи моменти с помощта на редици от функции на Ляпунов.
4. Метод на граничните уравнения за устойчивост на импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия.
5. Устойчивост на ненулеви решения на диференциални уравнения с импулси в произволни моменти.
6. Асимптотическа устойчивост на ненулеви решения на диференциални уравнения с променлива структура и нефиксирани моменти на импулсни въздействия.
7. Оптимални импулсни въздействия и максимални интервали на съществуване на решения на диференциални уравнения с импулси.

Показано е че разглеждания тип диференциални уравнения са адекватен математически апарат за изучаване на свойствата на редица класически модели:

1. Модел на Gompertz.
2. Развитие на модел тип хищник-жертва.
3. Логистичен модел на Verhulst.
4. Терапевтични модели с променлива структура и импулси.
5. Оптимални терапевтични модели.

Статии [8]-[19] са свързани с метода на блуждаещите най-малки квадрати.

По-надолу ще се спрем подробно на метода и получените резултати.

Нека $\mathcal{D}$ е компакт в $\mathbb{R}^d$.

Нека $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ са дадени (несъвпадащи: $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ ако $i \neq j$) точки в $\mathcal{D}$ и нека:

- (1) $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена непрекъсната функция.
- (2) $\{p_1, \dots, p_l\}$ са дадени непрекъснати и линейно независими функции, $p_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$. Нека $\mathcal{P}_l$ е линейната им обвивка.
- (3) $W : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ е дадена непрекъсната и неотрицателна функция. Освен това или функцията W е непрекъсната в 0, т.е. $\exists \lim_{r \rightarrow +0} W(r) = W(0)$ или $\exists \lim_{r \rightarrow +0} W(r) = +\infty$.

Нека

$$w(r) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \lim_{r \rightarrow +0} W(r) = +\infty, \\ \frac{1}{W(r)}, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Забележка. Обикновено за базис в $\mathcal{P}_l$ избираме полиноми или мономи от степен не надминаваща l .

Забележка. Примери за въведените теглови функции W и w ($r = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} W(r) &= e^{-\alpha^2 r^2} && \text{exp-weight,} \\ W(r) &= r^{-\alpha^2} && \text{Shepard weights,} \\ W(r) &= r^2 e^{-\alpha^2 r^2} && \text{McLain weight,} \\ w(r) &= e^{\alpha^2 r^2} - 1 && \text{see Levin's works.} \end{aligned}$$

Нека $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ е фиксирана точка.

Казваме, че $p^* \in \mathcal{P}_l$ е апроксимация на f по *метода на блуждаещите най-малките квадрати* в $\mathbf{x}$, ако p^* минимизира (относно всички $p \in \mathcal{P}$) израза

$$\sum_{i=1}^m w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) (p(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i))^2, \quad (1)$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^m w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) (p^*(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i))^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^m w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) (p(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i))^2 : p \in \mathcal{P}_l \right\}$$

Така получената апроксимация (за всяко $\mathbf{x}$) ще означаваме с $\hat{L}(f)$.

За да определим коефициентите $\{a_1, \dots, a_m\}$ в линейната апроксимация

$$\hat{L}(f) = \sum_{i=1}^m a_i f(\mathbf{x}_i),$$

разглеждаме задачата за минимизиране на квадратичната форма

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^m w(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|) a_i^2, \quad (2)$$

при условия (апроксимацията е точна за всяка базисна функция p_j)

$$\sum_{i=1}^m a_i p_j(\mathbf{x}_i) = p_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, l. \quad (3)$$

Полагаме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = (p_j(\mathbf{x}_i)) &= \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_l(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_l(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_m) & p_2(\mathbf{x}_m) & \cdots & p_l(\mathbf{x}_m) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= 2 \begin{pmatrix} w(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\|) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}) \\ p_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ p_l(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ще казваме, че са валидни условията (H2) ако

H2.1. $1 \leq l < m$, $1 \in \mathcal{P}_l$.

H2.2. w е неотрицателна и диференцируема функция, $w(r) > 0$ при $r > 0$.

H2.3. $\det(\mathbf{E}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}) \neq 0$ (вж. [15]: матрицата $\mathbf{E}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}$ е обратима ако $\text{rank}(\mathbf{E}) = l \leq m$).

Теорема 1. (вжж. [Levin1998]) Нека са изпълнени условията (H2).

Тогава:

1. Апроксимацията, дефинирана чрез (2) и (3) е

$$\hat{L}(f) = \sum_{i=1}^m a_i f(\mathbf{x}_i), \quad (4)$$

където $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})^t$ е означена транспонираната матрица

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_0 \mathbf{c}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E} (\mathbf{E}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E})^{-1}. \quad (5)$$

2. Задачата за определяне на апроксимация по метода на блуждаещите най-малките квадрати съвпада с определената апроксимация (4).
3. Ако $W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0$ за всяко $i = 1, \dots, m$, то апроксимацията е интерполационна, т.е. $\hat{L}(f)(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Забележка. Апроксимацията е локална, ако $\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = +0$, т.е. в този случай апроксимацията “зависи чувствително” само за “близки” до $\mathbf{x}$ данни.

Базирайки се на резултата в теорема 1, в [15]-[17] са изучени някои свойства на матрицата

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E} (\mathbf{E}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^t = \mathbf{A}_0 \mathbf{E}^t.$$

Доказани са следните резултати:

1. В [17] е показано, че $\mathbf{A}$ е идемпотентна матрица; всички собствени стойности на $\mathbf{A}$ са 0 или 1. Намерени са граници на най-малката и най-голямата сингуларна стойност на разглежданата матрица.

2. При апроксимация на Backus-Gilbert (т.е. $l = 1$, $p_1(\mathbf{x}) = 1$), вж. [15] е валидно неравенството

$$\|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{m}.$$

3. В общия случай, вж. [16], е доказано неравенството

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \leq k(\mathbf{D})k^2(\mathbf{E}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{D})}{\sigma_{\min}(\mathbf{D})} \frac{\sigma_{\max}^2(\mathbf{E})}{\sigma_{\min}^2(\mathbf{E})},$$

където $k(\cdot)$ (респ. $\sigma_{\min}(\cdot)$, $\sigma_{\max}(\cdot)$) е условен номер на матрица (респ. минимална, максимална сингуларна стойност).

4. В статия [17] е доказано неравенството

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) \leq (m-1) \text{trace}(\mathbf{D}^{-1}) \max\{w_1, \dots, w_m\}.$$

Използвайки известен резултат (вж. [Jabbari2015]), за нормата на матрицата $\mathbf{A}_0$ получаваме

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(\mathbf{A}_0) \sigma_{\min}(\mathbf{E}^t) &\leq \sigma_{\max}(\mathbf{A}_0 \mathbf{E}^t) \\ &= \sigma_{\max}(\mathbf{A}) \leq (m-1) \text{trace}(\mathbf{D}^{-1}) \max\{w_1, \dots, w_m\}, \end{aligned} \quad (*)$$

или

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}_0) \leq \frac{m-1}{\sigma_{\min}(\mathbf{E})} \text{trace}(\mathbf{D}^{-1}) \max\{w_1, \dots, w_m\}. \quad (**)$$

В статии [18] и [19] са използвани получените резултати за оценка на грешката при апроксимация по метода на блуждаещите най-малки квадрати.

В [18] следвайки метод изложен от Levin в [Levin1998] е показано, че за всяка точка $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ е валидно неравенството ($\mathbf{x}_{k_0}$ е най-близка точка до $\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - \hat{L}(f)(\mathbf{x})| &\leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{k_0})| + \sum_{i=1}^m |f(\mathbf{x}_i)| |a_i(\mathbf{x}_{k_0}) - a_i(\mathbf{x})| \\ &\leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{k_0})| + (\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\| + 1) \sum_{i=1}^m |f(\mathbf{x}_i)|. \end{aligned}$$

Очевидно не е трудно да оценим $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{k_0})|$. Например чрез теоремата за средните стойности:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{k_0})| \leq M_f \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_0}\|$$

където

$$M_f = \max\{\|\nabla f((1-\xi)\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}_{k_0})\| : \xi \in [0, 1]\}.$$

За да получим оценка на $\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|$ в [18] са използвани (*) и (**). Показано е, че

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\| \leq M_a D_{\text{tr}}(\mathbf{x}) w_{\max}(\mathbf{x}).$$

където

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{(m-1)\|\mathbf{c}\|}{\sigma_{\min}(\mathbf{E}^t)}, \\ w_{\max}(\mathbf{x}) &= \max\{w_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) : i = 1, \dots, m\}, \\ D_{\text{tr}}(\mathbf{x}) &= \text{trace}(\mathbf{D}^{-1}) = \sum_{i=1}^m w_i^{-1}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) = \sum_{i=1}^m W_i(\|\mathbf{x}, \mathbf{x}_i\|). \end{aligned}$$

В статия [19] е изследвана грешката при използването на подхода на Backus-Gilbert. За целта е конструирана и използвана модификация на метода за оценка на грешката предложен в [Fasshauer2007].

В статии [8]-[11] е проложен метода на ближдаещите най-малки квадрати за определяне (предсказване) на различни характеристики на нефтени деривати.

В [8] е конструиран метод за определяне на цетановото число на нефтени деривати, базирайки се на 4 известни параметъра на необработен нефт. Проведен е алгоритъм в среда Maple. Показано е, че използването на метода на блуждаещите най-малки квадрати води до значително по-точни резултати от известните методи ASTM D-976 и ASTM D-4737 (използвани от American Society for Testing and Materials, вж. [ASTM976] и [ASTM4743]). Показано е също така, че предлаганият метод е “по-точен” от някои методи изградени на базата на неврони мрежи в среда MATLAB.

В [9] са изучават някои свойства на двадесет и две сурови масла (произвеждани в различни рафинерии по света), от които 19 се преработват и в рафинерия LUKOIL Neftohim Burgas (LNB). Маслата са изследвани в изследователската лаборатория на LNB чрез измерване на 67 свойства. Тези 22 сурови масла са с леко ниски сяр, лека сяр, междинна ниска сяр, междинна сяр, междинна висока сяр, тежка висока сяр и с много голямо съдържание на сяр. Нов математически подход е използван за изучаване на отношенията между нефтени свойства. Установено е, че петролните свойства, плътността и съдържанието на сяр на суровия петрол могат да бъдат симулирани и нещо повече: възможно да се предостави адекватен математически модел, аналогичен на тази от пълния анализ на суров петрол. В приведените математически модели е използван класическия метод на най-малките квадрати и метода на блуждаещите най-малки квадрати.

В [10] са изследвани двадесет и две сурови масла (произвеждани в различни рафинерии по света) и класифицирани в 4 групи:

1. I група: лека, ниска сяр (30-400API, $S < 0.5\%$ маса);
2. II група: лека сяр (30-400API, $S = 0,5 - 1,5\%$ маса);
3. III група: тежка, с висока сяр (15-300API, $S = 1.5, 3.1\%$ маса);
4. IV група: изключително тежки, с висока сяр (150API, $S \geq 3\%$ маса).

Изследванията са свързани с определяне на разпределения на температурата на кипене и молекулното тегло. Като математически апарат (функции на разпределение) са използвани: трипараметричен модел за разпределение на Riazi, и функцията за разпределение по четири параметъра на Weibull. Установено е, че Weibull-extreme разпределение е по-адекватно за определяне на температури на кипене на тежко масло до температура 750°C и разпределение на молекулното тегло до 955g/mol . За да определим разпределението на по-високи стойности е използвана екстраполация.

ЛИТЕРАТУРА

[Levin1998] D. Levin, The approximation power of moving least-squares, *Mathematics of Computation*, **67**, No. 224 (1998), 1517-1531; <http://www.math.tau.ac.il/~levin/>

[Jabbari2015] Faryar Jabbari, *Linear System Theory II, Chapter 3: Eigenvalue, Singular Values, Pseudoinverse*, The Henry Samueli School of Engineering, University of California, Irvine (2015), <http://gram.eng.uci.edu/~fjabbari/me270b/me270b.html>.

[Fasshauer2007] G. Fasshauer, *Multivariate Mesh-free Approximation*, Interdisciplinary Mathematical Sciences, Volume 6, World Scientific Publishers, Singapore, 2007;
http://www.math.iit.edu/~fass/603_ch7.pdf

[ACTM976] <https://www.astm.org/Standards/D976.htm>

[ACTM4743] <https://www.astm.org/Standards/D4737.htm>